

太原理工大学 2009 年攻读硕士研究生入学试题

考试科目: 数学分析 科目代码: 704 分值: 150

一、求下列极限 (本题共 3 小题, 每小题 8 分, 满分 24 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{1+4x^3}-1} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right].$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}.$$

二、(本题满分 14 分)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ 内有定义, 证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

当且仅当对于任意的数列 $\{x_n\}$ 满足:

$$1) x_n \in (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r) (n = 1, 2, \dots);$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{ 都有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

三、(本题共 3 个小题, 每小题 6 分, 满分 18 分)

对满足以下条件的函数 $f(x)$, 分别证明其可积性

(1) 在 $[a, b]$ 上单调有界.

(2) 在 $[a, b]$ 上连续.

(3) 在 $[a, b]$ 上除内部具有有限个第一类间断点外, 其余点处均连续.

四、(本题满分 12 分)

设二元函数 $f(x, y)$ 满足:

1) 在带形域 $\{(x, y) | c \leq y \leq d; a \leq x < +\infty\}$ 上连续;

2) 广义含参积分 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

证明: $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 上连续.