河北大学2005年硕士研究生入学考试试卷

卷别：B

学科、专业	研究方向	考试科目	考试时间
基础数学，应用数学		高等代数与解析几何 435 436	

特别声明：答案一律答在答题纸上，答在本试卷纸上无效。

一．（10分）计算下列n阶行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a+x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

二．(20分) 设V是数域P上的n维线性空间，$\beta(x,y)$是V上的非退化的反对称双线性函数，I是V的子空间，记$I^{\perp}=\{v \mid v\in V,\beta(x,v)=0,\forall x\in I\}$，证明：

1. $\dim I^{\perp}=\dim V-\dim I$，这里$\dim V$表示$V$的维数.

2. $\dim I$与$\dim I^{\perp}$的奇偶性相同.

三．(10分) 设$p(x),q(x)$是数域F上的不可约多项式，且$p(x)\neq q(x)$，证明：对F上任意一个多项式$f(x)$，则有$(f(x),p(x))=1$，或存在$u(x),v(x)$，使得$f(x)=u(x)p(x)+v(x)q(x)$.

四．(20分) 设σ是数域P上的线性空间V的一个线性变换，且$\sigma^2=\sigma$，证明：

1. $\sigma^{-1}(0)=\{v-\sigma(v)\mid v\in V\}$.　　2. $V=\sigma^{-1}(0)\oplus\sigma V$.

3. 如果τ是V的线性变换，则$\sigma\tau=\tau\sigma$的充要条件是$\sigma^{-1}(0),\sigma V$都是τ的不变子空间.

河北大学2005年硕士研究生入学考试试卷

卷别：B

学科、专业	研究方向	考试科目	考试时间
基础数学，应用数学		高等代数与解析几何 435	

特别声明：答案一律答在答题纸上，答在本试卷纸上无效。

五.（20） **1.** 设 B 是实 n 阶对称矩阵. 证明：B 为正定矩阵的充要条件是对任何正定矩阵 A，及实数 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu \neq 0, \lambda A + \mu B$ 是正定矩阵.

2. 设 A, B, C 是 n 阶方阵，且 $C \neq 0, n > 1$，证明：若 $ABC = 0$，则矩阵 AB 的特征多项式是可约的.

六.（50 分）

1. 已知两条异面直线 $l_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$，$l_2 : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$，求两条直线的公垂线方程.

2. 求直线 $l : \begin{cases} y - 4z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周得到的曲面方程, 并求直线 l 和 z 轴的夹角.

3. 已知曲面 $\sum : x^2 - 4y^2 = z$ 与平面 $\pi : x + 2y + z = 1$，求：1） $\sum$ 上平行于 π 的两条直线，2）求两条直线所在的平面方程.

七. (20 分)设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$\alpha_1 \cdots, \alpha_n; \beta_1, \cdots, \beta_n$ 是 V 的两组基，且 $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \beta_j, \beta_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \alpha_j$，$a_{ij}, b_{ij}$ 都是非负整数，$1 \leq i, j \leq n$. 证明对任意 i，存在 j，使得 $\alpha_i = \beta_j$，$1 \leq i, j \leq n$.