

# 河北大学 2011 年硕士研究生入学考试试卷

卷别: [ A ]

适用专业	考试科目代码	考试科目名称
基础数学、应用数学、运筹学与控制论	619	数学分析

特别声明: 答案一律答在答题纸上, 答在本试卷纸上无效。

一、计算题 (共 65 分. 答案一律写在答题纸上, 否则无效.)

1、(10 分) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}$ .

2、(10 分) 求  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}}$ ,  $x \geq 0$ .

3、(10 分) 求  $\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$ .

4、(10 分) 求函数的间断点, 并判断类型:

$$f(x) = \frac{x}{\tan x}.$$

5、(10 分) 求下列级数的和  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ .

6、(15 分) 计算  $\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ ,

其中  $\Sigma$  是球面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ , 方向取外侧.

二、证明题 (共 60 分. 答案一律写在答题纸上, 否则无效.)

1、(10 分) 证明不等式:  $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$  ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ).

2、(10 分) 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且在  $(a, b)$  内可微, 证明在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi), \quad (a > 0).$$

3、(10 分) 证明: 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内非负, 存在三阶导数, 且方程  $f(x) = 0$  有两个相异实根, 则存在  $c \in (a, b)$  使  $f^{(3)}(c) = 0$ .

## 河北大学 2011 年硕士研究生入学考试试卷

卷别: [ A ]

4、(15 分) 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ) 发散,  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$

也发散.

5、(15 分) 函数  $f(x)$  在区间  $I$  上一致连续的充分必要条件是: 对区间  $I$  上任意两个数列  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$ , 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) - f(y_n)] = 0$ .

三、综合题 (共 25 分. 答案一律写在答题纸上, 否则无效.)

1、(10 分) 讨论函数  $f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2}$  的导数.

2、(15 分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  一致连续,  $a$  与  $b$  都是有限数, 问下列函数在  $[a, b]$  是否一致连续? (证明或举例)

(1)  $g(x)$  在  $[a, b]$  一致连续, 那么  $\max\{f(x), g(x)\}$  与  $\min\{f(x), g(x)\}$  在  $[a, b]$  是否一致连续?

(2)  $g(x)$  在  $[a, b]$  一致连续, 那么乘积  $f(x)g(x)$  在  $[a, b]$  是否一致连续?