2008年硕士研究生入学初试试题

科目代码名称： 813 高等代数 共2页 第1页

注：本试卷共13题，满分150分，答题时间：3小时. 请把试题按序号做在答题纸上，做在题签上无效.

1. （15分）设$Q[x]$表示有理数域上的多项式的集合，c是某一有理系数多项式的根，令

$$\mathrm{I}=\left\{ f(x)\in Q[x] \,\middle|\, f(c)=0 \right\}$$

证明（1）在I中唯一的存在着一个首项系数为1的多项式$p(x)$，使I中每一多项式$f(x)$都有$p(x)\mid f(x)$；

（2）$p(x)$是有理数域上的不可约多项式；（3）若$c=\sqrt{2}+i$，试求$p(x)$.

2.（8分）计算4级行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & 1+x_1^3 & 1+x_1^4 \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & 1+x_2^3 & 1+x_2^4 \\ 1+x_3 & 1+x_3^2 & 1+x_3^3 & 1+x_3^4 \\ 1+x_4 & 1+x_4^2 & 1+x_4^3 & 1+x_4^4 \end{vmatrix}.$$

3.（10分）设$A=(a_{ij})$是实$m\times n$矩阵，秩$A=r<n$. X_0为线性方程组$AX=0$的非零解，证明：

$$秩(A',X_0)=r+1，其中A'为A的转置矩阵.$$

4.（6分）设有数域p上的线性方程组$AX=0$与$BX=0$，其中A，B分别是$m\times n$与$s\times n$矩阵，如果它们的通解中所含自由未知量的个数之和大于n，证明：线性方程组$AX=0$与$BX=0$有非零公共解.

5.（14分）设A，B都是$n\times n$矩阵，且$AB=O$，证明：

（1）秩A + 秩$B\le n$；

（2）对给定的矩阵A，必定存在矩阵B，使 秩A + 秩$B=k$，其中k满足：秩$A\le k\le n$.

6.（10分）已知3级矩阵A的逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

试求伴随矩阵A^*的逆矩阵.

7.（10分）求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0 \\ x_1+5x_2+3x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

的解空间V，并写出V在R^4中的正交补$V^\perp$.

8. （12分）设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

矩阵$B=(kE+A)^2$，其中k为实数，E为单位矩阵. 求对角矩阵Λ，使B与Λ相似，并求k为何值时，B为正定矩阵.

9. （12分）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$n$维欧氏空间$V$中两个向量组，证明存在一个正交变换$\sigma$，使 $\sigma\alpha_i=\beta_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$的充分必要条件是：$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$ $(i,j=1,2,\cdots,m)$.

10. （15分）在P^3（P是数域）中，线性变换σ定义如下

$$\begin{cases}\sigma\eta_1=(-5,0,3)\\ \sigma\eta_2=(0,-1,6)\\ \sigma\eta_3=(-5,-1,9)\end{cases},\quad 其中\begin{cases}\eta_1=(-1,0,2)\\ \eta_2=(0,1,1)\\ \eta_3=(3,-1,0)\end{cases}$$

求σ在基$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$下的矩阵.

11. （14分）设V是复数域上的n维线性空间，σ，τ 是V的线性变换，且$\sigma\tau=\tau\sigma$，证明：

（1）如果λ_0是σ的一个特征值，那么V_{λ_0}是τ的不变子空间；

（2）σ，τ 至少有一个公共的特征向量.

12. （12分） 设复矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\a&2&0\\b&c&-1\end{bmatrix}$$

问矩阵A可能有什么样的若当标准形？并求A相似于对角矩阵的充分必要条件.

13. （12分）元素属于实数域R的2×2矩阵的全体，按照矩阵的加法及实数与矩阵的乘法构成实数域R上的一个线性空间W，令$M=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$，在这个线性空间中，变换$F(A)=AM-MA$，$A\in W$ 是一个线性变换，试求F的核及核的一组基.