# 2008年硕士研究生入学初试试题

科目代码名称： 709 数学分析 共2页 第1页

**注：请将试题做在标准答题纸上，在题签上做题无效。**

一、求函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ 单调区间、极值、凹凸区间、拐点、渐近线，并作出其图像。 （15分）

二、设摆线一拱 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ 与 $x$ 轴所围平面图形为 $D$，常数 $a>0$，

（1）求 $D$ 的面积； （2）求 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得的旋转体的体积。 （10分）

三、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}x^n$ 的收敛域及和函数。 （10分）

四、设 $f(x)=x^2$，$x\in[-\pi,\pi]$，求 $f(x)$ 的 Fourier 级数，并利用 Parseval 等式

$\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ 的值。 （10分）

五、利用 Gauss 公式计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，

其中 $\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上侧。 （10分）

六、求曲线 $\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$ 在 $(1,-2,1)$ 处的切线方程及法平面方程。 （10分）

七、求曲线 $y=p\sqrt{x}$、$y=q\sqrt{x}$ 与直线 $y=ax$、$y=bx$ 所围图形面积，

其中常数满足 $0<a<b$，$0<p<q$。 （10分）

八、设 $g(x)=\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$，其中 $n,k$ 为正整数且有 $k\le n$，

计算 $\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^2g(x)\,\mathrm{d}x$ （10分）

九、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续、沿任意方向的方向导数存在，但不可微。（13 分）

十、设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散，$x_n>0$ 恒成立，记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{S_n^2}$ 收敛。（13 分）

十一、设 $\delta>0$，证明：$I(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$ 关于 $y$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛，并利用 Dirichlet 积分计算 $I(y)$ 的值。（13 分）

十二、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且 $f''(x)>0$ 恒成立，设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 皆为正数，在 $[a,b]$ 任取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，证明：

$$f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)\leq\frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$（13 分）

十三、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导函数，且 $f(0)=f'(0)=f(1)=0$，证明：对于任意的 $x\in[0,1]$，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(x)=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}x^2(1-x)$（13 分）