

## 2009 年硕士研究生复试考试试卷

科目名称: 914 常微分方程

共 2 页

一、单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)。

1. 方程  $y''' - x^2 y'' - x^5 = 1$  的通解中含有任意常数的个数为 ( )

A 1      B 2      C 3      D 4

2. 下列方程中的线性微分方程是 ( )

A  $\cos(x+y') = y$     B  $yy' = y$     C  $y'' = xy - x$     D  $y''' = \sin y$ 3. 微分方程  $y' = y$  满足条件  $y(0) = 1$  的特解是 ( )A  $e^x$       B  $e^x - 1$       C  $ce^x$  (C 为任意常数)      D  $2 - e^x$ 4. 当  $n=1$  时, 方程  $y' + p(x)y = q(x)y^n$  最确切的名称是 ( )A 一阶方程      B 贝努利方程  
C 一阶线性方程      D 一阶线性齐次方程

5. 在整个数轴上线性无关的一组函数是 ( )

A  $x, x+1, x-1$       B  $0, x, x^2, x^3$ C  $e^{2+x}, e^{x-2}$       D  $e^{2-x}, e^{x-2}$ 

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)。

1. 一阶微分方程  $y' = f(x, y)$  的解  $y = \varphi(x)$  代表  $xy$  平面上的一条曲线, 我们称它为微分方程的\_\_\_\_\_。2. 方程  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  存在只与  $x$  有关而与  $y$  无关的积分因子的充分必要条件是\_\_\_\_\_。3.  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  是线性方程组  $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$  的基本解组的充分必要条件是

(1) \_\_\_\_\_, (2) \_\_\_\_\_。

4. 保证方程  $y' = x^{-\frac{1}{3}}$  的初值解存在且唯一的区域是\_\_\_\_\_。5. 函数  $f(t) = e^{at}$  的拉普拉斯变换是\_\_\_\_\_。

三、求出下列方程 (组) 的通解 (每小题 10 分, 共 30 分)。

1.  $\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$

2.  $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$

3.  $\frac{dx}{dt} = y + z, \frac{dy}{dt} = x + z, \frac{dz}{dt} = x + y$



#### 四、求初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 - y^2 & R: |x+1| \leq 1 \quad |y| \leq 1 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

的解的存在区间，并求第二次近似解。给出解的存在区间的误差估计（15分）。

#### 五、试证 $n$ 阶线性非齐次微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t)$$

存在且最多存在  $n+1$  个线性无关解（20分）。