2009年硕士研究生入学初试试题

科目代码名称：**708 数学分析**　　共1页 第1页

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$　（10分）

2. 证明第一积分中值定理：设 $f(x)\in C[a,b]$，$g(x)\in C[a,b]$，且 $g(x)$ 不变号，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$。　（13分）

3. 计算 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$ 的递推公式，并求 I_4。　（10分）

4. 求证 若 $x\geq 0$，则（1）$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，其中 $\frac{1}{4}\leq\theta(x)\leq\frac{1}{2}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\frac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$。　（10分）

5. 证明：$\sin\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，$\sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续。　（12分）

6. 设 $C_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，证明数列 $\{C_n\}$ 发散。　（13分）

7. $\forall x>0$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 的敛散性。　（10分）

8. 设 $g(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域 $U(a,\delta)$ 内连续，令 $f(x)=(x-a)g(x)$

求证：（1）$f'(a)=g(a)$；（2）若 $g'(a)$ 不存在，则 $f''(a)$ 也不存在。　（13分）

9. 计算 $I_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$。　$(n\in N^+)$　（13分）

10. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)ds$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截部分。　（13分）

11. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=1$。　（13分）

12. 计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)e^n}$。　（10分）

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有连续导数，且 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上分段光滑，又 $\int_0^\pi f(x)dx=0$，

试证：$\int_0^\pi[f'(x)]^2dx\geq\int_0^\pi f^2(x)dx$。　（10分）