# 2009年硕士研究生入学初试试题

## 科目代码名称：813 高等代数　　共2页 第1页

注：本试卷共2页、13题，满分150分，答题时间3小时．请把试题按序号做在答题纸上，做在题签上无效．

1.（8分）设$[f(x),g(x)]$表示$f(x)$，$g(x)$的首项系数是1的最小公倍式，证明：如果$f(x)$，$g(x)$的首项系数都是1，那么

$$[f(x),g(x)](f(x),g(x))=f(x)g(x),$$

其中$(f(x),g(x))$表示$f(x)$，$g(x)$的首项系数是1的最大公因式．

2.（10分）求$t$值，使多项式$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$有重根，并求出重根及其重数．

3.（10分）已知$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，且 $AXB=AX+A^2B-A^2+B$，求$X$．

4.（10分）设$\alpha=(1,2,1)$，$\beta=(1,\dfrac{1}{2},0)$，$\gamma=(0,0,8)$，$A=\alpha^T\beta$，$B=\beta\alpha^T$，求解方程

$$2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma^T,$$ 其中$\alpha^T$，$\gamma^T$分别为$\alpha$，$\gamma$的转置．

5.（12分）试将$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2cx_1x_3$化为标准形，求出变换矩阵，并指出$a$，$b$，$c$满足什么条件时，$f(x_1,x_2,x_3)$为正定．

6.（8分）设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个秩为$n$的二次型，证明：存在$R^n$的一个$\dfrac{1}{2}(n-|s|)$维子空间$V_1$（其中$s$为符号差），使对任一$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_1$，有$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$．

7.（24分）在$R^4$中，$\alpha_1=(1,2,1,0)$，$\alpha_2=(-1,1,1,1)$，$\beta_1=(2,-1,0,1)$，$\beta_2=(1,-1,3,7)$，记 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，$W_1=V_1\cap V_2$，$W_2=V_1+V_2$，

（1）求$W_1$的一组基，并扩充成$R^4$的一组基；　（2）求$W_2$在$R^4$中的正交补$W_2^\perp$．

8.（8分）设$V$是数域$P$上一个$n$维线性空间，$\sigma$是$V$的一个线性变换，且$\sigma^2=\sigma$，证明：在$V$中存在一组基，使$\sigma$在该基下的矩阵是主对角元素为1或0的对角矩阵，其中1的个数等于$\sigma$的秩．

9. （24分）用$J$表示元素全是1的$n$级矩阵（$n\geq 2$），设$f(x)=a+bx$是有理数域上的一元多项式，令$A=f(J)$，

（1）求$J$的全部特征值和全部特征向量；

（2）求$A$的所有特征子空间；

（3）矩阵$A$可否对角化？如果可以对角化，求出有理数域上一个可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵，并写出这个对角矩阵；

（4）求$A$的最小多项式.

10. （12分）设矩阵

$$C=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

（1）求$C$的不变因子与初等因子；（2）求$C$的若当标准形；（3）求$C$的有理标准形.

11. （8分）设$\sigma$是数域$P$上线性空间$V$的线性变换，如果$\sigma$的特征多项式$f(\lambda)$可以分解成一次因式的乘积 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$，则$V$可以分解成不变子空间的直和

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s,$$

其中$V_i$表示$(\sigma-\lambda_i\delta)^{r_i}$（$i=1,2,\cdots,s$）的核空间，$\delta$是恒等变换.

12. （10分） 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$（$1<s<n$）是$n$维欧氏空间$V$的$s$个单位正交向量组成的向量组，

$$W=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \mid \sum_{i=1}^{s}k_i=0\}$$

（1）证明：$W$是欧氏空间$V$的子空间；

（2）求$W$的基与维数.

13. （6分）设$V_1$，$V_2$是$n$维欧氏空间$V$的子空间，且$V_1$的维数小于$V_2$的维数，证明：$V_2$中必有一个非零向量正交于$V_1$中一切向量.