

河北工业大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [B]

科目名称 数学分析

科目代
码

401

共 2 页

适用专业 应用数学、计算数学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

一、求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^{\frac{1}{n}}$ (15 分)

二、求方程 $\frac{1}{\sin x} + \frac{3\sqrt{3}}{\cos x} = \lambda$ (λ 为给定的实数) 在 $[0, 2\pi]$ 的实数解的个数 (15 分)

三、假设在 $[0, a]$ 上恒有 $|f''(x)| \leq M$ ，且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内部取最大值，证明：
 $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$ (15 分)

四、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 二次可微，且 $f(0) = f(1)$ ， $|f''(x)| \leq 1$ ，证明： $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ (15 分)

五、设 $0 < \lambda_n < \lambda_{n+1}$ ，当 $x \geq \lambda_1$ ， $\varphi(x) > 0$ 且 $\varphi(x)$ 单调不减， $\int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{dt}{t\varphi(t)} < +\infty$ ，证明：级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right)$ 收敛. (15 分)

六、将函数 $f(x) = x^2$ ， $x \in [-\pi, \pi]$ 展开成傅里叶级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和 (15 分)

七、设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果对 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta > 0$ ，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，都有 $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ ，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处上半连续，如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上点点上半连续，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上半连续。证明：闭区间上的上半连续函数一定有上界. (15 分)

八、证明：多项式 $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$ 的根全部是正的 (15 分)

九、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，证明： $2 \int_0^1 f(x) dx \int_x^1 f(y) dy = \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2$ (15 分)

河北工业大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [B]

科目名称 数学分析

科目代
码

401

共 2 页

适用专业 应用数学、计算数学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

十、(1) 若 $a > 0$, $b > 0$ 以及 $\lambda > 0$, $\beta > 0$, $\lambda + \beta = 1$, 证明: $a^\lambda b^\beta \leq \lambda a + \beta b$ (5 分)

(2) 设 $a < A$, 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[a, A]$ 非负连续, $\lambda > 0$, $\beta > 0$, $\lambda + \beta = 1$, 证明: $\int_a^A [f(t)]^\lambda [g(t)]^\beta dt \leq \left[\int_a^A f(t) dt \right]^\lambda \left[\int_a^A g(t) dt \right]^\beta$ (5 分)

(3) 证明 $\ln B(x, y)$ 对固定的 $y > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 是变元 x 的凸函数, 其中,
 $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ (5 分)