

河北工业大学 2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [A]

科目名称 数学分析

科目代码 810 共 1 页

适用专业 应用数学、计算数学

注: 所有试题答案一律写在答题纸上, 答案写在试卷、草稿纸上无效。

一、证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - b_{n-1}) = d$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = d$. (15 分)

二、设函数 $f(x)$ 在 0 点某邻域 U 内有界, 且满足 $f(\alpha x) = \beta f(x)$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$. 证明: 函数 $f(x)$ 在 0 点连续. (15 分)

三、设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有界可积, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0$. 证明: 存在常数 $\alpha \in [0, 1]$, 使得 $\int_\alpha^{\alpha+1} f(x) dx = 0$. (15 分)

四、将函数 $f(x) = 2 + |x|$, $(-1 \leq x \leq 1)$ 展开成以 2 为周期的傅立叶级数, 并由求此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和. (15 分)

五、应用对参数求导法则计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx$ ($a > 1$). (15 分)

六、判断 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda + \sin x} dx$ ($\lambda > 0$) 的敛散性. (15 分)

七、计算 $\iiint_S (x+y-z) dy dz + [2y + \sin(x+z)] dz dx + (3z + e^{x+y}) dx dy$, 其中 S : 是曲面 $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$ 的外侧. (15 分)

八、设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上有定义, 且对固定的 $x \in [a, b]$, $f(x, y)$ 关于 y 单调增; 对固定的 $y \in [c, d]$, $f(x, y)$ 关于 x 单调增. 证明: $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上可积. (15 分)

九、证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{x^2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$ 在任何闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 但对任何 x_0 , 该级数在 $x = x_0$ 点非绝对收敛. (15 分)

十、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负、严格递增的连续函数, 记 $F_n(x) = f^n(x)$, 并由第一积分中值定理, $\exists \theta_n \in [0, 1]$, 使得 $F_n(\theta_n) = \int_0^1 F_n(x) dx$, $n = 1, 2, \dots$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 1$. (15 分)