# 河北工业大学 2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [A]卷

科目名称 高等代数 科目代码 360 共 3 页

适用专业 计算数学、应用数学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

一、填空题（共 20 分，每题 4 分。答案一律写在答题纸上，否则无效。）

1）多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ $(a\neq 0)$ 所得余式为（　　　）.

2）若齐线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 只有零解，则 $\lambda$ 应满足的条件是（　　　）.

3）设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $P_1P_2A=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$.

4）设 $n(n\geq 3)$ 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$，若矩阵 $A$ 的秩为 $n-1$，则 $a$ =（　　）.

5）二次型 $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2t\,x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，则 $t$ 的取值范围是（　　　）.

二、单项选择题（共 20 分，每题 4 分。答案一律写在答题纸上，否则无效。）

1）设 $A$ 为 $3\times 3$ 矩阵，$|A|=-2$，把 $A$ 按列分块为 $(A_1,A_2,A_3)$，其中 $A_j$（j=1, 2, 3）是 $A$ 的第 j 列，则行列式 $|A_3-2A_1,3A_2,A_1|=$（　　　）.

(A) 0　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 6

2）设 $A$ 为 3 阶正交矩阵，$|A|>0$，则必有（　　）。

(A) $A$ 的一个特征根等于 1　　(B) $A$ 的三个特征根同时大于零

(C) $A$ 的三个特征根不同时大于零　　(D) 以上三个结论均不正确

3) 设$n$ 阶矩阵$A$ 与$B$等价，则必有（　　）.

(A) 当 $|A|=a$ $(a\neq 0)$时，$|B|=a$　　(B) 当 $|A|=a$ $(a\neq 0)$时，$|B|=-a$

(C) 当 $|A|\neq 0$时，$|B|=0$　　(D) 当 $|A|=0$时，$|B|=0$

4) 设$A,B$为满足$AB=0$的任意两个非零矩阵，则必有（　　）.

(A) $A$ 的列向量组线性相关，$B$的行向量组线性相关

(B) $A$的列向量组线性相关，$B$的列向量组线性相关

(C) $A$ 的行向量组线性相关，$B$的行向量组线性相关

(D) $A$ 的行向量组线性相关，$B$的列向量组线性相关

5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 则$A$与$B$（　　）

(A) 合同，且相似　　(B) 合同，但不相似

(C) 不合同，但相似　　(D) 既不合同，也不相似

## 三、计算题（共40分，共3题）

1)（10分）用 $g(x)=x^2-x+2$ 除 $f(x)=x^5-x^4+2x^3+3x^2-8x+13$，求商与余式。

2)（10分）若定义二阶矩阵$B=A^5-A^4+2A^3+3A^2-8A+13E$，其中$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{7}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，

$E$是一个 $2\times 2$ 单位矩阵，求$B$的逆矩阵。

3)（20分）设二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+4bx_2x_3$$

经正交变换$X=PY$化为标准形$f=y_2^2+2y_3^2$，求参数$a,b$及所用的正交变换。

## 四、（10分）

证明：设$f(x)$是数域$P$上的多项式，如果对于任意的$a,b\in P$，都有

$$f(a)+f(b)=f(a+b),$$

则$f(x)=kx,\ k\in P.$

五、(20 分)

设齐线性方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + cx_3 + cx_4 = 0 \\ x_1 + cx_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

的解空间维数是 2。

1）求它的一个基础解系；

2）证明：$R^4$ 为上面方程组系数矩阵的行向量所生成的线性空间与其解空间的直和。

3）对任意 $n$ 个未知量的齐线性方程组 $BX=0$，其中 $B$ 为 $m\times n$ $(m\le n)$ 矩阵，$R^n$ 是否为矩阵 $B$ 的行向量所生成的线性空间与方程 $BX=0$ 解空间的直和。证明你的结论。

六、(10 分)

设 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 $A,B$ 分别为 $m$ 阶，$n$ 阶对称矩阵，$C$ 为 $m\times n$ 阶矩阵。

1）计算 $P^TDP$，其中 $P=\begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}C \\ O & I_n \end{pmatrix}$，$I_n$ 为 $n$ 阶单位矩阵，$P^T$ 为 $P$ 转置矩阵；

2）利用 1）的结果判断矩阵 $B-C^TA^{-1}C$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论。

七、(10 分)

设 $P[x]_n$ 表示数域 $P$ 上次数小于 $n$ 的多项式，再添上零多项式构成的数域 $P$ 上的线性空间；D 表示求微分变换，即 $\mathrm{D}(f(x))=f'(x)$。在 $P[x]_n$ 中 $(n>1)$，求微分变换 D 的特征根，并证明，D 在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵。

八、(20 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的一组向量，而

$$\Delta=\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m) \end{pmatrix}$$

其中 $(\alpha_i,\alpha_j)$ 为向量 $\alpha_i,\alpha_j$ 的内积。

1）证明：当且仅当行列式 $|\Delta|\ne 0$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关。

2）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 的秩是否等于矩阵 $\Delta$ 的秩，证明你给出的结论。