河北工业大学 2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [A]卷

科目名称 高等代数 科目代码 601 共 2 页

适用专业、领域 应用数学、计算数学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

一、 填空题（共 30 分，每题 5 分。答案一律写在答题纸上，否则无效。）

1. $f(x)=\left(8x^9-6x^7+4x-7\right)^3(2x^6-3)^7$ 的展开式中各项系数之和为________。

2. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$______。

3. 已知线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解，则 $a=$______。

4. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|2A^*B^{-1}|=$__________。

5. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围是__________。

6. 向量组 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,1),\alpha_4=(2,8,5)$ 的秩为_____。

二、（15 分）设 $f(x),g(x)$ 为两个非零多项式，证明：$f(x)$ 与 $g(x)$ 不互素的充要条件是存在多项式 $h(x),k(x)$，$0\le\partial(h(x))<\partial(g(x)),0\le\partial(k(x))<\partial(g(x))$，满足

$$f(x)h(x)+g(x)k(x)=0。$$

三、（15 分）设 D 为一个三阶行列式，其元素为 0 或 1，试证：$|D|\le 2$。

四、（10 分）证明: 方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0 \\ \vdots \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=0 \end{cases}$$

在复数域内只有零解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$。

五、（10 分）记E为单位2阶方阵，若A为2阶方阵且$A^5=0$，证明：$(E-A)^{-1}=E+A$。

六、（15 分）设 $V_1,V_2,\cdots V_s(s\geq 2)$是向量空间$V$的$s$个非平凡子空间，证明：$V$中至少有一个向量同时不属于$V_1,V_2,\cdots V_s$。

七、（20 分） 设T为k维线性空间V的线性变换，$\alpha\in V$，满足$T^k(\alpha)=0$，$T^{k-1}(\alpha)\neq 0$。

（1）证明：$\alpha,T(\alpha),T^2(\alpha),\ldots,T^{k-1}(\alpha)$构成$V$的一个基；（10 分）

（2）写出T在上述基下的矩阵；（5 分）

(3) 若A为$n\times n$矩阵，证明：线性方程组$A^nX=0$与线性方程组$A^{n+1}X=0$同解。（5 分）

八、（15 分）设A,B是$n\times n$实对称矩阵，A是正定矩阵，证明：存在实$n\times n$可逆矩阵C，使$C^{\mathrm{T}}(A+B)C$为对角矩阵。（此处C^{T}为矩阵C的转置矩阵）。

九、（20 分）设矩阵A和矩阵B相似，其中

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$$

（1）求x和y的值；（2）求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$。