

河北工业大学 2012 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [B] 卷

科目名称 数学分析

科目代码 810 共 1 页

适用专业、领域 基础数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 应用数学, 运筹学与控制论, 统计学

注: 所有试题答案一律写在答题纸上, 答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

一、(15 分) 设  $x_n = \frac{1}{2 \ln 2} + \cdots + \frac{1}{n \ln n} - \ln \ln n$ , ( $n = 2, 3, \cdots$ ). 证明  $\{x_n\}$  收敛.

二、(15 分) 利用 Stolz 公式求  $S_n = \frac{\sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{n^2}$  的极限.

三、(15 分)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a)f(b) < 0$ , 应用闭区间套定理证明: 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

四、(15 分) 证明:  $f(x) = \frac{x^{2012}}{e^x}$  在  $[0, \infty)$  上一致连续.

五、(15 分) 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 导函数  $f'(x)$  在  $(a, b)$  内单调, 则  $f'(x)$  在  $(a, b)$  内连续.

六、(15 分) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有二阶导数,  $0 \leq x \leq 1$  时  $|f(x)| \leq 1$ ,  $|f''(x)| \leq 2$ . 试证: 当  $0 \leq x \leq 1$  时  $|f'(x)| \leq 3$ .

七、(15 分) 证明:  $[a, b]$  区间上单调函数  $f(x)$  一定黎曼可积.

八、(15 分) 证明: 若  $f(x)$  在  $[a, \infty)$  上单调, 且  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

九、(15 分) 设  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ ,  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ . 将方程变化为关于  $u$  和  $v$  的方程.

十、(15 分) 设  $f(x)$  在  $\mathbf{R}^n$  中的有界开区域  $D$  内连续. 试证:  $f(x)$  在  $D$  内一致连续的充要条件是:  $\forall x_0 \in \partial D$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} f(x)$  存在, 这里  $\partial D$  表示  $D$  的全体边界点组成的集合.