河北工业大学 2012 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [A]卷

科目名称 高等代数 科目代码 601 共 2 页

适用专业、领域 基础数学、计算数学、概率与数理统计、应用数学、运筹学与控制论、统计学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

一、填空题（共 30 分，每题 5 分。答案一律写在答题纸上，否则无效。）

1) 已知 $f(x)=\begin{pmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$，$f(x)$ 中 x^4 的系数为______，x^3 的系数为______。

2) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，矩阵 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵，则 A^* 的逆矩阵 $\left(A^*\right)^{-1}=$ ______。

3) 若向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)$，$\alpha_2=(2,0,t,0)$，$\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2，则 $t=$ ______。

4) 若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 t 应满足______。

5) 设 σ 是 $\mathbf{R}^3$ 的线性变换：$\sigma(x,y,z)=(x+2y-z,y+z,x+y-2z)$，

则 σ 的秩（$\sigma(\mathbf{R}^3)$ 的维数）=______.。

6) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，

则 $a=$ ______。

二、（10 分）设 $f(x)$，$g(x)$ 与 $h(x)$ 均为实数域上的多项式，证明：如果

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$$

则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$

三、（15 分） 已知 $\alpha_1=(1,-1,1)$，$\alpha_2=(1,t,-1)$，$\alpha_3=(t,1,2)$，$\beta=(4,t^2,-4)$，若 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出且表示法不唯一，求 t 及 β 的表达式。

四、（15 分）设$a_{ij}(t)$都是t的可微函数，证明

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{da_{ij}(t)}{dt}A_{ij}(t)$$

其中$A_{ij}(t)$是$a_{ij}(t)$的代数余子式。

五、（15 分）设A,B为两个$m\times n$矩阵，证明：　秩（$A+B$）≤秩（A）+秩（B）

六、（15 分）设A为一个n级实对称矩阵，且A的行列式$|A|<0$，证明：必存在实n维列向量$X\neq 0$，使$X^TAX<0$（X^T表示X的转置）。

七、（15 分）设n级实方阵A满足$A^2=A$，W_1为$Ax=0$的解空间，W_2为$(A-E)x=0$的解空间（E表示n级单位矩阵），证明：$\mathbf{R}^n=W_1\oplus W_2$。

八、（15 分）实数域上所有次数小于n的多项式全体构成的线性空间记为$\mathbf{R}[x]_n$。在$\mathbf{R}[x]_4$中定义内积为$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$，求$\mathbf{R}[x]_4$的一组标准正交基。

九、（共 20 分，每问 10 分）

A为 3 阶实对称矩阵，A的秩为2，且

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1）求A的所有特征值和特征向量，

2）求矩阵A。