1998年天津大学泛函分析(含度量空间)考研试题

考研加油站收集整理 http://www.kaoyan.com

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

kaoyan.com
考研加油站

1. （每小题4分，共20分）

(a) 填空．Banach空间 l^1 的对偶空间（或称为共轭空间）是 l^∞．这表明对任意 $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^\infty$，一一对应于 $f\in(l^1)^*$，使得对于每一个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^1$，

$$f(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(b) 叙述一致有界定理（Banach-Steinhaus）．

(c) 在内积空间 X 中，取一固定元素 $y\in X$．定义 X 上的泛函 f_y，使得对于每一个 $x\in X$，

$$f_y(x)=(x,y)$$

这里 (x,y) 表示 x 与 y 的内积．则 $\|f_y\|=$ ________ ．（填空）

(d) 设 X 是复Banach空间，$T:X\to X$ 是有界线性算子，λ 为一复数．叙述：λ 是 T 的正则值的定义．

(e) 设 X 和 Y 是赋范线性空间，$T:X\to Y$ 是线性算子．叙述：T 是紧算子（或称为全连续算子）的定义．

2. (10分)．设 (X,d) 和 (Y,ρ) 是两个度量空间，$f:X\to Y$，$x_0\in X$．证明：f 在点 x_0 处连续，当且仅当对于 X 中任意序列 $\{x_n\}$，若在 X 中 $x_n\to x_0$，则在 Y 中 $f(x_n)\to f(x_0)$．

3. (10分) 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的序列．证明：

(a) 若 $\{x_n\}$ 是收敛序列，则 $\{x_n\}$ 是Cauchy序列．

(b) 若 $\{x_n\}$ 是Cauchy序列且有一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x_0，则此序列 $\{x_n\}$ 也收敛于 x_0．

kaoyan.com

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

4.（10分）设X和Y是赋范线性空间，$T:X\to Y$是有界线性算子，且T是满射。若存在正数b，使得对一切$x\in X$都有

$$\|Tx\|\geq b\|x\|.$$

证明：$T^{-1}:Y\to X$存在，它也是有界线性算子并且$\|T^{-1}\|\leq \frac{1}{b}$。

5.（10分）在实Banach空间$C[a,b]$上定义泛函f，使得对每个$x\in C[a,b]$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x(t_i),$$

其中$t_1,\cdots,t_n$是$[a,b]$中n个不同的固定点，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是n个固定的实数。证明：f是有界的，并求出f的范数。

6.（10分）设X是赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，$Y=span\{x_n\}$，$x_0\in X$。若$\{x_n\}$弱收敛于x_0，证明：$x_0\in\overline{Y}$（这里$\overline{Y}$表示Y的闭包）。

7.（8分）设X和Y是赋范线性空间，$T:X\to Y$是闭线性算子。若A是X中的紧集，证明A的象$T(A)$是Y中的闭集。

kaoyan.com

8.（8分）设M是内积空间X的子集。证明：$M^{\perp}=(\overline{span\,M})^{\perp}$

9.（8分）设$\{e_i\}$是Hilbert空间H的规范正交系（或称标准正交系）。证明：$\{e_i\}$是完全规范正交系（即$\overline{span\{e_i\}}=H$）的充分必要条件是：对于任意$x,y\in H$都有

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)\overline{(y,e_i)}$$

（这里$\overline{(y,e_i)}$是内积(y,e_i)的共轭复数。）

10.（6分）设$\{T_n\}$是Hilbert空间H上的一列酉算子。若$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$，证明：T也是H上的酉算子。

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com