1998年天津大学概率论与数理统计考研试题

一.（16分） 5个球放入3个盒子中，每个球都以同样的概率$\frac{1}{3}$落入任一盒中，盒子的编号分别记为1, 2, 3. 若记ξ为其中至少有一个球的盒子的最小号码，试求ξ的分布律及ξ的数学期望$E\xi$.

二.（16分） 已知二维随机向量(ξ, η)的联合概率分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x\le 2,\ \max(0,x-1)\le y\le\min(1,x)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求条件概率密度$p(x|y)$和$p(y|x)$.

三.（14分） 从$[0,1]$区间中随机地取两个数ξ_1和ξ_2，记$\eta=\max(\xi_1,\xi_2)$，试求：(1) η的分布函数$F_\eta(x)$，(2). η的方差$D\eta$.

四（14分） 设随机变量X_λ服从参数为λ的泊松分布，试证：对任意的实数x，恒有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}P\left\{\frac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

五.（12分） 设总体$X\sim N(0,\frac{1}{8^2})$，(X_1,X_2,X_3)为取自该总体的一个简单随机样本，记$T_1=(X_1-X_2)^2$，$T_2=\left(\frac{X_1}{X_3}+\frac{X_2}{X_3}\right)^2$. 试问：$T_1$, T_2各服从什么分布（说明理由，可以相差一个常数）.

六.（14分） 设随机变量X的分布密度函数为

$$f(x;\theta)=e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}\quad,\quad x=0,1,\cdots,\quad \theta>0.$$

(1) 求θ的最大似然估计.

(2) 设$\hat\theta_1$, $\hat\theta_2$为θ的两个独立的无偏估计，且$D(\hat\theta_1)=3D(\hat\theta_2)$. 求常数$c_1$, c_2，使$c_1\hat\theta_1+c_2\hat\theta_2$是$\theta$的无偏估计，且在所有这样的

线性估计中有最小方差.

七(14分) 设随机变量y与自变量X有如下线性关系

$$y = a + bX + \varepsilon$$

其中$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$，$\sigma^2$未知，现有n次独立试验数据

(x_i, y_i)，$i=1, 2, \cdots, n$.

(1) 求a, b的最小二乘估计$\hat{a}$, $\hat{b}$，并指出其统计性质.

(2) 写出检验回归方程显著性的步骤.