

1998 年天津大学数理方程（含常微分方程）考研试题

考研加油站收集整理 <http://www.kaoyan.com>

常微分方程部分

一. (16分) 求方程组

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} x$$

满足初始条件

$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的特解 $x(t)$, 其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$.

二. (16分) 设 $X(t)$ 为连续的 n 阶方阵, $X(0)$ 存在, $X(t)$ 满足

$$X(t+s) = X(t) \cdot X(s), \quad |X(0)| \neq 0$$

求证: $\frac{dX(t)}{dt}$ 存在, 且有 n 阶常量方阵 A 存在, 使 $\frac{dX}{dt} = AX$

数理方程部分

三. (16分) 判断下列方程的类型, 并将它化为标准形式

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x + 5u_y + u = 0$$

四. (16分) 试求解 Darboux 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < t, \quad t > 0 \\ u(0, t) = \varphi(t), \quad u(t, t) = \psi(t), & 0 \leq t \leq a \end{cases}$$

其中, φ 和 $\psi \in C^2[0, a]$, 且 $\varphi(0) = \psi(0)$, $a > 0$ 是已知常数, 画出定解条件的决定区域.

五. (16分) 考虑受摩擦力作用的弦振动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + b u_t = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

其中 $b > 0$ 是常数, $u \in C^2(Q)$ 是上述问题的解, 其中

$Q = \{(x, t) | 0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$, 试证明: 弦的总能量

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx$$

随时间增加而减少。由此证明问题解的唯一性。

六 (20分) 应用付立叶变换求解

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - t u = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$