# 1999 年天津大学高等代数（含解析几何）考研试题



一 填空题（共 15 分，每一小题 3 分）

1. 設四级方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\beta,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 为四维列向量，若 $|A|=1$，$|B|=2$，则 $|A+B|=$ ______

2. 設 A 为 n 级可逆矩阵，如果交换 A 的第 i 行与第 j 行得到 B，则 $BA^{-1}=$ ______

3. 設向量组 $(\mathrm{I})=\left\{ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4-\cdots-x_n=0 \\ x_2-x_3-x_4-\cdots-x_n=0 \end{cases} \right\}$，则向量组(I)的秩等于 ______

4. 設 A 为 n 级方阵，若 $A\neq 3E$，且 $r(A-3E)+r(A+5E)=n$，则数 $\lambda=$ ______ 必是 A 的特征值。

5. 多项式 $x^3+3px+q$ 有重根的条件是 ______

二 选择题（共 15 分，每一小题 3 分）

1. 如果六级方阵 A 的秩等于 4，则 A 的伴随矩阵 $A^*$ 的秩等于（　　）

(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 0

2. 設 $\alpha_1,\alpha_2$ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的两个特解，又 $\eta_1,\eta_2$ 是对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，$K_1,K_2$ 为任意常数，则 $AX=\beta$ 的全部解为（　　）

(A) $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+K_1\eta_1+K_2(\eta_1-\eta_2)$

(B) $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+K_1\eta_1+K_2(\alpha_1-\alpha_2)$

(C) $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+K_1\eta_1+K_2(\eta_1+\eta_2)$

(D) $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+K_1\eta_1+K_2(\alpha_1-\alpha_2)$

3. 設三级方阵 A 的三个特征值为 1, 2, −2，且 B 与 A 相似，则 B 的伴随矩阵 $B^*$ 的三个特征值为（　　）

(A) $-4,\ -2,\ 2$,

(B) $1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$,

(C) $1,\ 2,\ -2$,

(D) $-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$.

4、設三級方陣A的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$，$A^{-1}$ 为A的逆矩陣，$A^{*}$ 为A的伴隨矩陣

则 $\left|A^{*}-\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right| =$ (　　　　)

(A) $0$

(B) $-3$

(C) $\frac{27}{4}$

(D) $-\frac{27}{4}$

5、設 三級方陣 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则必有 (　　)

(A) $AP_1P_2=B$

(B) $AP_2P_1=B$

(C) $P_1P_2A=B$

(D) $P_2P_1A=B$

三 (共60分 每一小題10分)

1. 設 $f(x)=d(x)f_1(x)$；$g(x)=d(x)g_1(x)$；

證明：若 $(f(x),g(x))=d(x)$ 且 $f(x)$和$g(x)$不全为零，則 $(f_1(x),g_1(x))=1$

反之若 $(f_1(x),g_1(x))=1$，則 $d(x)$是$f(x)$，$g(x)$的一个最大公因式

2. 问 $a,b$ 取何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？在有无穷多解时，求其全部解

3. 设三级方阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&4\\-1&-1&3\end{pmatrix}$

(1) 求 $A$ 的最小多项式.

(2) 求 $A$ 的初等因子.

(3) 求 $A$ 的若当标准形.

4. 设三级实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$

(1) 求一个正交矩阵 $C$ 及对角形矩阵 $\Lambda$,使 $C^TAC=\Lambda$.

(2) 求一个对称矩阵 $B$ 使 $A=B^2$

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为线性空间 $V_4$ 的一组基. $A$ 是 $V_4$ 上的一个线性变换. 且 $A\alpha_1=\alpha_4$,

$A\alpha_2=\alpha_3$,

$A\alpha_3=\alpha_2$.

$A\alpha_4=0$.

(1) $AV_4$ 及 $A^{-1}(0)$

(2) 求 $A$ 的特征值和对应的特征子空间

(3) 试问在 $V_4$ 中是否存在一组基,使 $A$ 在该基下的矩阵为对角形矩阵,说明理由.

6. 设线性空间 $V_n$ 中向量 $\alpha$ 在一组基 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$. 且 $\alpha$ 在另一组基 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

又 $y_1=x_1$, $y_2=x_2-x_1$, $y_3=x_3-x_2$ $\cdots$ $y_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}$,
$y_n=x_n-x_{n-1}$.

(1) 求由基 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 的过渡矩阵 $T$

(2) 已知 $\gamma=\beta_1+2\beta_2+3\beta_3+\cdots+n\beta_n$

求 $\gamma$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 下的坐标

四.（共10分 每一小题5分）

1. 設 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}$ 是歐氏空間 $R^n$ 中一正交向量组，$\beta_1, \beta_2 \in R^n$

且 $(\beta_1, \alpha_i)=0$

$(\beta_2, \alpha_i)=0$ $i=1,2,\cdots n-1$

証明：$\beta_1, \beta_2$ 线性相关

2. 設 A. B. C $R^{n\times n}$

$$D=\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$$

若 D是正定矩陣，証明：$C-BA^{-1}B^T$ 也是正定矩陣