1999年南开大学实变函数考研试题

1. 设 $f(x)$ 和 $f_n(x)$ $(n\geq 1)$ 都是 $(-\infty,\infty)$ 上的实值函数。 (20)
试问下列等式是否成立？（成立时需证明，不然需举反例）
$\{x: \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\}=\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\{x: |f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{r}\}$.

2. 设可测集 $E\subset[0,1]$. 若 $\delta>0$，使对 $[0,1]$ 中任何开区间 (a,b) (20)
有 $m(E\cap(a,b))\geq\delta(b-a)$，求证 $m(E)=1$.

3. 设在可测集 E 上 $f_k\Rightarrow f$, $g_k\Rightarrow g$, $k\to\infty$，其中“$\Rightarrow$”表示测度 (20)
收敛.
(i) 证明 $f_k+g_k\Rightarrow f+g$, $k\to\infty$;
(ii) 若 $m(E)<\infty$，求证 $f_kg_k\Rightarrow fg$. 此外举例说明一般情形下
$f_kg_k\Rightarrow fg$ 不一定成立.

4. 设 E 是可测集，$f(x)$ 在 E 上 L 可积. 求证 (20)
(i) $F(x)=\int_{(-\infty,x)\cap E} f(t)dt$ 是 x 的一致连续函数；
(ii) $I=\{\int_e f(x)dx : e$ 是 E 的可测子集$\}$ 是一个闭区间，并描述 I 的两个端点.

5. 设 $f(x)$ 在 $(a-1,b+1)$ 上 L 可积，其中 $-\infty<a<b<\infty$. 求证 (20)
$\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0$.