1999 年南开大学数理方程考研试题

注意：以下各题中的小题是分别计分的，如不能完成上面的小题，也可以直接完成下面小题。

一、给出定解问题(P)：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (0<x<l,\ t>0); \\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x), & (0\le x\le l); \\ -u_x(0,t)=g_1(t),\quad u_x(l,t)=g_2(t), & (t\ge 0). \end{cases}$$

(i) 作未知函数代换 $u=v+w$，其中 v 是新的未知函数，w 是待定函数，使得定解问题(P)化为关于 v 的定解问题(Q)，而且边界条件是齐次的。

(ii) 设(P)的边界条件是齐次的（即 $g_1(t)=g_2(t)=0$），求(P)的解。

（本题 20%）。

二、给出定解问题(P)

$$\begin{cases} u_{xx} + 5u_{xy} - 6u_{yy} = 0, & (-\infty<x<+\infty,\ y>0); \quad (1) \\ u(x,0)=2x^2,\quad u_y(x,0)=0, & (-\infty<x<+\infty) \quad (2) \end{cases}$$

(i) 判别方程(1)的类型；

(ii) 通过自变量的变换，化(1)为标准型；

(iii) 求方程(1)的通解；

(iv) 求(P)的解。

（本题 30%）

三、设区域 $\Omega=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,\ y>0\}$

(i) 求 Ω 的 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数；

(ii) 求解边值问题

$$\begin{cases} \Delta u=0, & (x,y)\in\Omega, \\ u(x,0)=\varphi(x), & (-\infty<x<+\infty). \end{cases}$$

其中函数 $\varphi(x)$ 连续，且有界．（本题 20%）

四、考虑初边值问题 (P)

$$\begin{cases} u_t-au_{xx}+cu=f(x,t), & (0<x<l,\ t>0); \\ u(x,0)=\varphi(x). & (0\le x\le l). \\ u(0,t)=g_1(t), \quad u(l,t)=g_2(t). & (t\geq 0). \end{cases}$$

其中常数 $a>0$, $c>0$．

(i) 证明：如果 $f(x,t)=0$，则

$$|u(x,t)|\le \max\{M, B_1, B_2\}$$

其中 $$M=\max_{0\le x\le l}|\varphi(x)|,$$

$$B_i=\sup_{0\le t<+\infty}|g_i(t)|,\quad (i=1,2).$$

(ii) 用上述极值原理证明：(P) 最多只有一个解；

(iii) 用能量方法证明：(P) 最多只有一个解．

（本题 30%）．