1999年南开大学拓扑学考研试题

以下六道题，共100分。

(一)(18分) 设 $f: R^n \to R$ 为欧氏空间 R^n 上的连续函数，证明：子集 $A=\{x\in R^n \mid f(x)\geq 0\}$ 是 R^n 的闭集。

(二)(18分) 设 $X\times X$ 是拓扑空间 X 与它自身的乘积空间，$X\times X$ 的子集 $\Delta=\{(x,y)\in X\times X \mid x=y\}$ 叫做对角线。证明：X 是 Hausdorff 空间当且仅当 Δ 是 $X\times X$ 的闭集。

(三)(18分) 设 $f: X\to Y$ 是满的闭映射（即 f 是连续映射且将 X 的每个闭集映成 Y 的闭集），而且对任意 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集。证明：若 X 是 Hausdorff 空间，则 Y 也是 Hausdorff 空间。

(四)(18分) 证明：若连通的度量空间 X 包含至少两个不同的点，则存在连续映射 $f: X\to[0,1]$ 使 $f(X)=[0,1]$，其中 $[0,1]$ 表示 0，1 为两端点的闭区间。

(五)(18分) 空间 X 上的锥形 CX 定义为商空间 $X\times I/X\times\{1\}$，其中 I 是闭区间 $[0,1]$。设 S^n 是 n 维单位球面，E^{n+1} 为 $n+1$ 维圆盘(或叫做球体)，证明：CS^n 同胚于 E^{n+1}。

(六)(10分) 设 X 是 2 维圆盘 E^2 在其内部挖掉一个小三角形内点后所得空间，Y 是 E^2 内部挖掉两个不相交的三角形的内点后所得空间。求出基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 和 $\pi_1(Y,x_0)$，其中 $x_0=(1,0)\in E^2$。