

南开大学 2011 年硕士研究生入学考试试题

学 院：010 组合数学研究中心、011 陈省身数学研究所、012 数学科学学院

考试科目：702 数学分析

专 业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、★生物信息学

注意：请将所有答案写在专用答题纸上，答在此试题上无效！

一、计算题：（每小题 15 分，共 60 分）

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{2}x - e^{-x^2} + \frac{x^4}{3}}{x^6}$.

2. 计算 $I = \int_L \frac{-ydx + xdy}{4x^2 + y^2}$, L 为 $x^2 + y^2 = 1$, 取逆时针方向。

3. 计算 $I = \iint_S \frac{x^3 + y^3 + z^3}{1-z} dS$, S 为 $x^2 + y^2 = (1-z)^2$, $0 \leq z \leq 1$.

4. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 - 7y^2$ 在闭区域 $\bar{D} = \{(x, y) | x^2 + 2xy + 4y^2 \leq 13\}$ 的最大值与最小值。

二、（15 分）设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为正整数数列, $a_1 = b_1 = 1$, $a_n + \sqrt{3}b_n = (a_{n-1} + \sqrt{3}b_{n-1})^2$, 证明数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 的极限存在, 并求该极限值。

三、（15 分）设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有连续的导函数, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 试证明

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{b-a}{4} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

四、（20 分）设级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n}$ 收敛, 数列 $\{na_n\}$ 单调递减, 试证: $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \ln \ln n = 0$.

五、（20 分）设 p, q 为实数, 试讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p (1+x^q)} dx$ 何时绝对收敛, 何时条件收敛, 何时发散, 并说明理由。

六、（20 分）设 $F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x} y}{x(1+x)} dx$, $y > 0$. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

i) 试证明: $F''(y) - F(y) + \pi = 0$. ii) 求出 $F(y)$ 的初等函数表达式。