北方工业大学

2004 年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

适用专业：应用数学

说　　明：答题时间为 3 小时。满分为 150 分。

(答题请写在答题纸上，试题纸上答题无效)

一．　**计算题：**（每小题 7 分，共 35 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{(1-e^{x})\sin x^{2}}$.

2．设 $y=\arctan e^{x}-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

3．设方程 $z+xy=f(xz,yz)$ 确定可微函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

4．求二次积分 $I=\int_0^1 x^2dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$.

5．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n!}{n^n}x^n$ 的收敛半径.

二．　**计算题**（每小题 10 分，共 70 分）

1．设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases}$，

问 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续？是否偏导数存在？是否可微？说明理由.

2．对正数 a 和 b，判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b^n}{a^n+b^n}$ 的敛散性.

3．求 $I=\oint_{L^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 为以 $(1,0)$ 为圆心，R 为半径的圆周 $(R\neq 1)$，

L^+ 表示逆时针方向.

88

北方工业大学

2004 年硕士学位研究生入学考试试题

(答题请写在答题纸上，试题纸上答题无效)

4. 计算曲面积分 $\iint\limits_S xz^2dydz+(x^2y-z^2)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$，$S$ 是半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，S 的方向是使其法向量和 z 轴正向的夹角为锐角.

5. 求不定积分 $\int t^a \ln t dt$ ，（a 为常数）.

6. 讨论反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 的收敛性(绝对收敛和条件收敛)，其中 $p>0$.

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 的收敛域及其和函数.

三. **证明题**（第 1、3 题分别为 12 分，第 2 题 11 分，第 4 题 10 分，共 45 分）

1. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，其中 $x_1=1, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right), n=1,2,3,\cdots$，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛，$\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界，证明：$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，又在 $[b,c]$ 上一致连续，$a<b<c$，用定义证明：$f(x)$ 在 $[a,c]$ 上一致连续.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $\int_0^1 xf(x)dx=f(1)$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

89