中国科学院软件研究所

二〇〇〇年招收硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：离散数学

一、(8 分) 求与公式$((x_1\to x_2)\to x_3)\to x_4$逻辑等价的主合取范式和主析取范式。

二、(8 分) 判断下列公式是：① 永真式；② 永假式；③ 其它。

(1) $(p\vee q)\to(p\wedge q)$

(2) $((p\to q)\wedge q)\leftrightarrow((q\vee r)\wedge q)$

(3) $\neg((q\to p)\vee\neg p)\wedge(p\vee r)$

(4) $((\neg p\vee q)\to r)\to((p\wedge\neg q)\vee r)$

三、(10 分) 在谓词逻辑中是否可以从前提

$\forall x(p(x)\to q(x))$;

$\exists x(r(x)\wedge\neg q(x))$

推出结论$\neg\forall x(r(x)\to p(x))$？证明你的回答。

四、(8 分) 问下述推理是否正确？若正确，给出谓词逻辑中的证明；若不正确，指出产生错误的原因。

鸟会飞，鸭子不是鸟；所以，鸭子不会飞。

五、(11 分) R 是集合 A 上的等价关系，A 的元素个数为 n。R 作为集合有 s 个元素，若 A 关于 R 的商集 A/R 有 r 个元素，证明 $rs\geq n^2$。

六、(10 分) <A, ≤>是格。对于 A 中任意元素 x, y, z 有

$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$。

若有 A 中元素 a, b, c 满足 $a\vee c=b\vee c$，$a\wedge c=b\wedge c$，则 $a=b$。

七、(13 分) G 为群，$a,b,c\in G$，$ab=cba$，$ac=ca$，$bc=cb$。

① 证明：若 a, b 的阶分别为 m, n，则 c 的阶整除 m 与 n 的最大公因子(m,n)。

② 若 a, b, c 的阶均为 2，给出集合 S={a, b, c}的生成子群。

八、(8 分) 设 A(G)是无向图 G 的邻接矩阵，证明：$(A(G))^l$中的第 i 行第 j 列元素 $a_{ij}^{(l)}$等于 G 中结点 v_i 和 v_j 之间长度为 l 的路的数目。对l进行归纳.

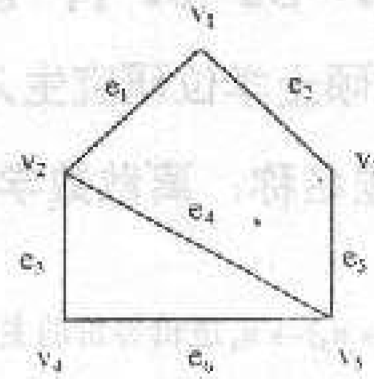
九、(14 分) ① 请画出下图(见下页)的邻接矩阵和关联矩阵。

→考虑一下：是如何得到这些性质?

② 不许画图，请问从图的邻接矩阵和关联矩阵中可以得到图的哪些性质？

邻接矩阵：①第i行(列)和为v_i的度数 ②$A(G)^l=(a_{ij}^l)_{n\times n}$ 则a_{ij}^l为结点i,j之间长度为l的路的数目 ③可判图连通性.

关联矩阵：①第i行和为v_i度数 ②关联矩阵秩=结点数-连通片数 ③求生成树及生成树个数.



十、(10 分) 设 V(G), E(G)分别为图 G 的结点集合和边集合，记ω(G)为图 G 的连通分支数，证明：

① $\forall e\in E(G)$，有$\omega(G)\le\omega(G-e)\le\omega(G)+1$；

② $\forall v\in V(G)$，则①中 G-e 未必可用 G-v 代替。

中国科学院软件研究所

2000年招收硕士学位研究生入学考试

"离散数学"试题参考答案

一. 主合取范式：$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$;

主析取范式：$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$

二. (1) 非永真可满足； (2) 永真； (3) 永假； (4) 永真.

三. 可以推出. 一个推导如下：

(1) $\exists x(r(x) \wedge \neg q(x))$

(2) $r(a) \wedge \neg q(a)$

(3) $\forall x(p(x) \to q(x))$

(4) $p(a) \to q(a)$

(5) $\neg q(a) \to \neg p(a)$

(6) $r(a) \wedge \neg p(a)$

(7) $\neg(\neg r(a) \vee p(a))$

(8) $\neg(r(a) \to p(a))$

(9) $\exists x \neg(r(x) \to p(x))$

(10) $\neg \forall x(r(x) \to p(x))$

四. 不正确. 将前提和结论分别表为

$A: \forall x(bird(x) \to fly(x))$

$B: \forall x(duck(x) \to \neg bird(x))$

$C: \forall x(duck(x) \to \neg fly(x))$

产生错误的原因在于推导过程中用到了从 A 推出

$A': \forall x(\neg bird(x) \to \neg fly(x))$.

但事实上从 A 和 B 推不出 A', 故从 A 和 B 推不出 C.

另一种更严格的解答，找出一个解释 I 使 $I(A) = I(B) = 1$ 且 $I(C) = 0$.

五. 设 A/R 的 r 个等价类集合的元素个数分别为 $m_1, m_2, ..., m_r$. 则

$$m_1 + m_2 + ... + m_r = n,$$
$$m_1^2 + m_2^2 + ... + m_r^2 = s.$$

由

$$(m_1^2 + m_2^2 + ... + m_r^2)/r \geq ((m_1 + m_2 + ... + m_r)/r)^2$$

得 $rs \geq n^2$.

六. $a = a\wedge(a\vee c) = a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c) = (b\wedge a)\vee(b\wedge c) = b\wedge(a\vee c) = b\wedge(b\vee c) = b.$

七. 1. 由于 c 与 a,b 均可交换, 且 $ab = cba$, 对此等式右乘 $n-1$ 次 b, 可得 $ab^n = c^n b^n a$. 从而 $c^n = e$. 同理, 左乘 $m-1$ 次 a, 得 $a^m b = c^m b a^m$, 因此 $c^m = e$.

由于 c 的阶 k 是满足 $c^k = e$ 的最小正整数, 可推得 $k \mid m, k \mid n$, 即 $k \mid (m,n)$.

2. $S = \{e, a, ab, b, c, ac, abc, bc\}$.

八. 对 l 用数学归纳法. $l = 1$ 时显然成立.

设命题对 l 成立, 由

$$(A(G))^{l+1} = A(G)\cdot(A(G))^l,$$

故

$$a_{ij}^{l+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{kj}^{(l)}.$$

根据邻接矩阵定义, a_{ik} 表示连接 v_i 和 v_k 的长度为 1 的路的数目, $a_{kj}^{(l)}$ 为结点 v_k 和 v_j 之间长度为 l 的路的数目, 故上式右边的每一项表示由 v_i 经过一条边到 v_k, 再由 v_k 经过一条长度为 l 的路到 v_j 的总长度为 $l+1$ 的路的数目. 对所有 k 求和, 即得 a_{ij}^{l+1} 是所有从 v_i 到 v_j 的长度为 $l+1$ 的路的数目, 故命题对 $l+1$ 成立.

九. 1. 邻接矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

关联矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

2. 邻接矩阵：第 i 行（列）和为 v_i 的度数． $A^l(G)=(a_{ij}^{(l)})_{n\times n}$，则 $a_{ij}^{(l)}$ 为结点 v_i 和 v_j 之间长度为 l 的路的数目．可判断图的连通性．

关联矩阵：第 i 行和为 v_i 的度数；关联矩阵的秩 = 结点数 − 连通片数；求生成树及生成树个数．

十． 1. $\forall e\in E(G)$，有且仅有两种情况：(i) e 出现在某回路之中；(ii) e 不属于任何回路．显然，在情况 (i)，$G-e$ 与 G 的连通分支数相同；在情况 (ii)，$G-e$ 的连通分支数比 G 的连通分支数多 1．

2. 考察星形图 (设为 G)：显然 $\omega(G-v)>\omega(G)+1$．