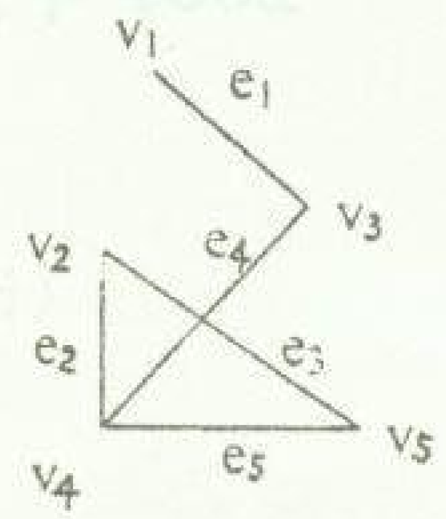
中国科学院软件研究所
2001年招收攻读硕士学位研究生入学试题
试题名称：离散数学

(图论部分)

一、(12 分)



(1) 给出右图的邻接矩阵与关联矩阵。

(2) 说明如何利用图的邻接矩阵和关联矩阵来判断一个无向图是否为树。

二、(12 分) 证明下面两个关于图的说法等价：

(1) 图中无回路。但增加一条新边，则得到一个且仅一个回路；

(2) 图连通。但删去任一条边后便不连通。

三、(9 分) 设图 G 连通，且每个结点的度数(或次数)均为偶数。则对任一结点 v，图 G-v 的连通分支数 $W(G-v)\leq\frac{1}{2}\deg(v)$，其中 $\deg(v)$ 为结点 v 的度数。

(数理逻辑部分)

四、(12 分) 下列公式中哪些是永真式，哪些是永假式，哪些是非永真非永假式：

(1) $((p\vee q)\wedge r)\rightarrow((p\vee(q\wedge p))$

(2) $((\neg p\wedge\neg q)\rightarrow\neg r)\leftrightarrow(r\wedge\neg(q\vee p))$

(3) $(\neg(p\vee\neg q)\rightarrow(q\rightarrow r))\leftrightarrow(q\rightarrow(p\vee r))$

(4) $((p\leftrightarrow q)\wedge r)\vee((p\vee q)\wedge\neg r)$

五、(9 分) 求与下述公式逻辑等值的前束合取范式

$(\forall x)(P(x,y)\vee(\forall y)R(y,z))\rightarrow(\forall z)Q(x,z)$

六、(12 分) 问下述推理是否逻辑有效？证明你的结论。

所有羊都吃草；所有死羊都不吃草。

所以，所有死羊都不是羊

(代数结构部分)

七、(11 分) 设集合 A 上关系 R、S 具有对称性。证明 R 与 S 的复合 $R \circ S$ 具有对称性的充要条件是 $R \circ S = S \circ R$。

八、(12 分) 若有限群 G 有且仅有 3 个不同的子群，则 G 必为循环群，且 G 的阶数为 p^2，p 为某个素数。

九、(11 分) 设集合 A 上偏序关系 R 有最大元。

(1) 若关系 $\widetilde{R}$ 具有对称性和传递性，且 $R \subseteq \widetilde{R}$。证明 $\widetilde{R} = A \times A$。

(2) 举例说明 R 的对称闭包可以不是 $A \times A$。

离散数学试题答案

一、(1) 邻接矩阵　　　　　　　　　　关联矩阵

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v1 & v2 & v3 & v4 & v5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B(G)=\begin{array}{c} \\ v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(2) 设图 G 是一个有 n 个结点的图。

若 $A^n(G)$中每个元素均大于 0，且 A(G)中恰有 2(n-1)个 1，则 G 为树；否则不是。

若 B(G)的秩为 n-1，且 B(G)的列数为 n-1，则 G 为树；否则不是。

二、设图为 G。

(1)⇒(2). $\forall v_1,v_2\in V(G)$，若 $v_1v_2\in E(G)$，则 v_1 与 v_2 连通。若 $v_1v_2\notin E(G)$，则由(1)知，$G+v_1v_2$ 中有圈 C，且边 v_1v_2 肯定在 C 中，故 $C-v_1v_2$ 为一条从 v_1 到 v_2 的通路，所以 v_1 与 v_2 连通。由 v_1,v_2 的任意性，图 G 连通。

任给边 $e=v_1v_2\in E(G)$，若 G-e 连通，则 G-e 中有一条从 v_1 到 v_2 的通路 C，于是 C+e 为 G 中的圈，矛盾。所以 G-e 不连通。

(2)⇒(1). 若 G 中有回路，设为 C，任取边 $e\in E(C)$。则任给 $v_1,v_2\in V(G)$，因 G 连通，所以 v_1 与 v_2 间有通路 $P(v_1,v_2)$；若 $e\notin E(P(v_1,v_2))$，则 $P(v_1,v_2)$是 G-e 中 v_1、v_2 间的通路。若 $e\in E(P(v_1,v_2))$，则 $P(v_1,v_2)+(C-e)$为 G-e 中一条从 v_1 到 v_2 的通路。综上，G-e 总连通，矛盾。所以，G 中无回路。

任取边 $v_1v_2\notin E(G)$，因 G 连通，所以 G 中有从 v_1 到 v_2 的通路 $P(v_1,v_2)$，所以 $P(v_1,v_2)+v_1v_2$ 即为图 $G+v_1v_2$ 中的一个圈。

若 $G+v_1v_2$ 有两个圈 C1、C2。若边 v_1v_2 不是 C1, C2 的公共边，则 C1、C2 中必有一个不含边 v_1v_2，所以 C1 或 C2 为图 G 中的圈，矛盾。若边 v_1v_2 是 C1、C2 的公共边，则 $C1-v_1v_2$、$C2-v_1v_2$ 为两条从 v_1 到 v_2 的不同的通路；所以$(C1-v_1v_2)\cup(C2-v_1v_2)$中有圈，该圈在 G 中，矛盾。所以 $G+v_1v_2$ 中仅有一个圈。

三、任给结点 $v\in V(G)$。设 G-v 的连通分支为 G1,G2,…,Gw。因为

图 G 连通，所以 $G_i(1\le i\le w)$中至少有一个结点与 v 相邻。因 G 中的每个结点的度数均为偶数，所以 $G_i(1\le i\le w)$中除了在 G 中与 v 相邻的结点的度数为奇数外，其余结点的度数均为偶数，而任一图中度数为奇数的结点的个数为偶数，所以每个 $G_i(1\le i\le w)$中至少有两个结点在 G 中与 v 相邻，故 $W(G-v)\le\frac{1}{2}\deg(v)$。

四、(1) 非永真且非永假；　(2) 永假；
(3) 永真；　(4) 非永真且非永假。

五、原式逻辑等价于

$(\forall x')(P(x',y)\vee(\forall y)R(y,z))\rightarrow(\forall z')Q(x,z')$

$(\exists x')(\forall z')((P(x',y)\vee(\forall y')R(y',z))\rightarrow Q(x,z'))$

$(\exists x')(\forall z')((\forall y')(P(x',y)\vee R(y',z))\rightarrow Q(x,z'))$

$(\exists x')(\forall z')(\exists y')((\neg P(x',y)\wedge\neg R(y',z))\vee Q(x,z'))$

$(\exists x')(\forall z')(\exists y')((\neg P(x',y)\vee Q(x,z'))\wedge(\neg R(y',z)\vee Q(x,z')))$

六、是(3 分)。令 sheep(x)、eatgrass(x)和 deadsheep(x)分别表示“x 是羊”、“x 吃草”和“x 是死羊”(2 分)。谓词演算中的形式推导如下：

(1) $\forall x(\text{sheep}(x)\rightarrow\text{eatgrass}(x))$	前提
(2) $\forall x(\text{deadsheep}(x)\rightarrow\neg\text{eatgrass}(x))$	前提
(3) $\text{sheep}(x)\rightarrow\text{eatgrass}(x)$	(1)全称指定
(4) $\neg\text{eatgrass}(x)\rightarrow\neg\text{sheep}(x)$	(3)逆否律
(5) $\text{deadsheep}(x)\rightarrow\neg\text{eatgrass}(x)$	(2)全称指定
(6) $\text{deadsheep}(x)\rightarrow\neg\text{sheep}(x)$	(5),(4)传递律
(7) $\forall x(\text{deadsheep}(x)\rightarrow\neg\text{sheep}(x))$	(6)全称推广

最后一式即结论“死羊都不是羊”。这就证明了原推理是逻辑有效的(7 分)。

七、(注：$x(R\circ S)y$ 的定义有两种不同的版本，即：(1) 存在 $z\in A$，使得 xSz, zRy；或 (2) 存在 $z\in A$，使得 xRz, zSy。采用两种不同定义的证明，对结论不产生影响，且证明思路都一致，均视为正确。以下证明采用(1)的定义)

(⇒) 若 $R\circ S$ 具有对称性：即$\forall x,y\in A$，若 $x(R\circ S)y$，则 $y(R\circ S)x$。

由复合的定义：$y(R\circ S)x \Leftrightarrow \exists z\in A$，使得 ySz 且 zRx。由于 R. S 都具有对称性，因而 $ySz \Rightarrow zSy$，$zRx \Rightarrow xRz$。

故 $x(R\circ S)y \Rightarrow y(R\circ S)x \Rightarrow \exists z\in A$，使得 $zSy, xRz \Rightarrow x(S\circ R)y$，而 x,y 是 A 中任意元素，从而 $R\circ S = S\circ R$.

($\Leftarrow$) 设 $R\circ S=S\circ R$，即 $\forall x,y\in A$，若 $x(R\circ S)y$，则 $x(S\circ R)y$，于是 $\exists z\in A$，使得 xRz, zSy；由 R. S 对称性可得 zRx, ySz，即 $y(R\circ S)x$。故由 $x(R\circ S)y$ 可得 $y(R\circ S)x$。即 $R\circ S$ 具有对称性。

八、假设 G 不是循环群。任取 $a\neq e$(e 为 G 的单位元)。则 a 生成的循环群$\langle a\rangle$是 G 的子群，又由于 G 不是循环群，因而 $G\neq\langle a\rangle$。又 G 有且仅有 3 个不同的子群，从而$\{e\}$、$\langle a\rangle$、G 就是这 3 个不同的子群。因而$\forall b\in G, b\neq e$，有$\langle b\rangle=\langle a\rangle$。从而 $\bigcup_{b\in G}\langle b\rangle=\langle a\rangle \Rightarrow G\subseteq\langle a\rangle$。与假设矛盾。即 G 为循环群。

若 G 为 1 阶循环群，则 G 的不同的子群个数必小于 3。设 $G=\langle g\rangle$，g 为 G 的生成元。因此$|G|$为合数。若 G 的阶包含不同的素因子 p_1、p_2，则$\{e\}$、$\langle g^{p_1}\rangle$、$\langle g^{p_2}\rangle$、G 都是 G 的不同的子群，矛盾。若$|G|=p^l$，p 为素数，$l\geq 3$；则$\{e\}$、$\langle g^{p}\rangle$、$\langle g^{p^2}\rangle$和 G 都是 G 的不同的子群，矛盾；即 $l\leq 2$。而 $l>1$，从而 $l=2$。即$|G|=p^2$。

九、(1) 由于 R 是偏序关系，因而具有自反性。$\forall a\in A$，有 $aRa \Rightarrow a\tilde{R}a$。$\tilde{R}$ 又具有对称性和传递性。所以 $\tilde{R}$ 为 A 上的等价关系。

对于任意的 $x,y\in A$，由于 R 具有最大元(设为 a)。因此，有 xRa, $yRa \Rightarrow x\tilde{R}a$, $y\tilde{R}a$。由 $\tilde{R}$ 的对称性，$y\tilde{R}a \Rightarrow a\tilde{R}y$。由 $\tilde{R}$ 的传递性，$x\tilde{R}a$, $a\tilde{R}y \Rightarrow x\tilde{R}y$。即任意的 A 中两元素都有关系 $\tilde{R}$，所以 $\tilde{R}=A\times A$。

(2) 取 $A=\{a,b,c\}$，$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c)\}$。R 的对称闭包为$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\}\neq A\times A$。