中国科学院 - 中国科学技术大学
2002 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称: 高等数学(乙)

一、填空题 (本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n} =$ __________.

2. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+e^{\sin x}} =$ __________.

3. 设 $z=z(x,y)$，且有 $yz+zx+xy=1$，则 $dz=$ __________.

4. 含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx$ 的收敛域为 __________.

5. 微分方程 $y''+4y'+4y=e^x$ 的通解为 __________.

二、选择题 (本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x\le 0 \\ x^2\cos\frac{1}{x}, & x>0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则

(A) $a=1,b=0$ (B) $a=0,b=0$

(C) $a=1,b=1$ (D) $a=0,b=1$

[ ]

2. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(-L,L)$ 内具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，则

(A) 在 $(-L,0)$ 和 $(0,L)$ 内均有 $f(x)>x$.

(B) 在 $(-L,0)$ 和 $(0,L)$ 内均有 $f(x)<x$.

(C) 在 $(-L,0)$ 内，$f(x)>x$；在 $(0,L)$ 内，$f(x)<x$.

(D) 在 $(-L,0)$ 内，$f(x)<x$；在 $(0,L)$ 内，$f(x)>x$.

[ ]

3. 设 L 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则曲线积分 $\int_L (x^4+2y^2z^2)dL=$

(A) $\frac{\pi a^5}{3}$ (B) $\frac{2\pi a^5}{3}$ (C) πa^5 (D) $2\pi a^5$

[ ]

4. 下列级数中，绝对收敛的级数是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1)$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{\sqrt{n}}+1}$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{e}+1}$

[ ]

5. 已知等式 $a+|x|=\pi-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, 其中 $-\pi\le x\le\pi$, a 为常数, 则 $a=$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) $-\pi$

[ ]

三、(3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

1. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+e^x}dx$

2. 计算积分 $\int_0^1(1-\sqrt{x})^n dx$

3. 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+[f'(x)]^2=\sin x$, 且 $f'(0)=0$. 证明: $x=0$ 是 $f(x)$ 的拐点.

四、(4 小题, 每小题 7 分, 共 28 分)

1. 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{nx}+e^{-nx}}$.

2. 计算曲线积分 $I=\oint_L z^2dx+(z^2+xy-x)dy+2xzdz$, 其中 L 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 与椭圆柱面 $x^2+4y^2=1$ 的交线. 从 z 轴正方向向下看, L 为顺时针方向.

3. 把 $y=\arctan\frac{3+x}{3-x}$ 展为 x 的幂级数, 并求收敛域.

4. 求微分方程 $(x-x^3y^2\ln y)y'=2y$ 的通解.

五、(3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

1. 设曲面 S: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$, 在 S 上求一切平面, 使此切平面与三坐标面所围成的四面体体积最大, 并求四面体体积的最大值.

2. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 在 $(-\pi,\pi]$ 内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ 1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 1<x\le\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展为富里叶级数 (说明收敛情况), 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n}{n^2}$.

3. 设区域 Ω 由曲面 $x=0, y=0, x+y=1, x+y=2, z(x+y)=1$ 及 $z=1$ 围成.

(1) 求 Ω 的体积 V. (2) 证明 $\iiint_\Omega\frac{dxdydz}{x^2+y^2+2z^2}\le\frac{V}{2}$.