中国科学院－中国科学技术大学
2003年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　　　　高等数学（B）

一、填空题（本题共5小题，每小题5分，满分25分，把答案填在答题纸上）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1})=()$.

2. $\int_1^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=()$. $2(1-\ln3+\ln2)=2-2\ln\frac{3}{2}$

3. 设 $z=f(x,y)=x^2e^y+2xy^3+e^xy$，则 $f_x'(1,0)+f_y'(1,0)=()$. $3+e$

4. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$ 的收敛区间为() $(-\infty, +\infty)$

5. 微分方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ 的通解为(). $y=\pm\sqrt{2c-x^2}\Rightarrow x^2+y^2=c$

二、选择题（本题共5小题，每小题4分，满分20分，每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在答题纸上）

1. 设 $f(x)$ 在点 x_0 可微，则 x_0 是 $f(x)$ 的

(A) 驻点　　(B) 拐点　　(C) 间断点　　(D) 可导点

2. 当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 为 $\frac{1}{x}$ 的

(A) 3阶无穷小　　(B) 2阶无穷小　　(C) 同阶无穷小　　(D) 等价无穷小

3. 下列哪个点在平面 $2x+5y=0$

(A) (3,0,3)　　(B) (0,3,0)　　(C) (5,−2,0)　　(D) (5,2,1)

4. $\int_0^1dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy=$

(A) $\int_0^{1-x}dy\int_0^1f(x,y)dx$　　(B) $\int_0^1dy\int_0^{1-x}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1dy\int_0^1f(x,y)dx$　　(D) $\int_0^1dy\int_0^{1-y}f(x,y)dx$

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 是收敛的，则

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 未必收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛　　(C) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

三、（本题 10 分）计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x\int_e^x \frac{1}{\ln t}dt}{x}$.

四、（本题 10 分）计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})$

五、（本题 10 分）计算定积分 $\int_0^1\dfrac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

六、（本题 10 分）证明：若 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上可导，且满足关系式 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$。则在开区间 $(0,1)$ 内存在一点 c 使得 $f(c)+cf'(c)=0$.

七、（本题 11 分）计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 D 是由 $x^2+y^2=2y$ 所确定的区域.

八、（本题 11 分）某单位要建造一个容积为 A 的圆柱形蓄水池．设底所用材料的单位面积的造价是侧面所用材料单位造价的两倍．问底半径与高成怎样的比例才能使蓄水池的造价最低.

九、（本题 12 分，每小题 6 分）

1. 求过曲面 $\pi: 9x^2+16y^2-25z^2=1$ 上点 $M(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5})$ 处的切平面方程

2. 求过点 M 且平行于 $3x+4y+5z+8=0$ 的平面与曲面 π 的交线 L 在点 M 处的单位切向量.

十、（本题 10 分）在曲线 $C:\begin{cases}z=x^4+2y^2\\x+y=1\end{cases}$ 上求一点 M 使其 z 坐标最小.

十一、（本题 11 分）求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 的通解.

十二、（本题 10 分）求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数

中国科学院 & 中国科学技术大学

2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

试题名称： 高等数学 (B)

一、 1. 1； 2. $2+2\ln\frac{2}{3}$； 3. $3+e$；

4. $(-\infty,+\infty)$； 5. $x^2+y^2=c^2$（c为任意常数）

二、 1. D； 2. B； 3. C； 4. D； 5. A

三、这是$\frac{\infty}{\infty}$型极限. (1 分) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x\int_2^x\frac{1}{\ln t}dt}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_2^x\frac{1}{\ln t}dt+\ln x\cdot\frac{1}{\ln x}\right)$ (6 分)

$=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_2^x\frac{1}{\ln t}dt\right)=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=1+0=1$. (10 分)

四、利用函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间$[0,1]$上的可积性. (2 分)

$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})=\frac{1}{n}(\sqrt{\tfrac{1}{n}}+\sqrt{\tfrac{2}{n}}+\sqrt{\tfrac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\tfrac{n}{n}})=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\tfrac{i}{n}}$. (8 分)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\tfrac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$. (10 分)

五、令 $x=\sin t$. 则 $\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t dt}{\sin t+\cos t}$. (5 分) 再令 $t=\pi/2-u$. 由于

$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t dt}{\sin t+\cos t}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin u du}{\cos u+\sin u}$. (8 分) 所以原积分$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{\pi}{4}$. (10 分)

六、令 $F(x)=xf(x)$. (1 分) 则由积分中值定理知存在一点$\xi\in(0,\frac{1}{2})$使得

$F(1)=f(1)=2\int_0^{1/2}xf(x)dx=2\xi f(\xi)\int_0^{1/2}dx=\xi f(\xi)$. (6 分) 由于$F(x)$在闭区间$[\xi,1]$上连续，在开区间$(\xi,1)$上可导，且$F(\xi)=\xi f(\xi)=F(1)$，所以由 Rolle 定理知，在开区间$(\xi,1)\subset(0,1)$内存在一点$c$使得$F'(c)=f(c)+cf'(c)=0$. (10 分)

七、$x^2+y^2=2y$的极坐标方程为$r=2\sin\theta$. (4 分) 所以 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2dr$

$=\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta-1)d(\cos\theta)=\frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{32}{9}$. (11 分)

八、设底半径为r，高为h，总造价为y. 设侧面的单位面积造价为k，则底面的单位面积造价是$2k$. 由题意有$A=\pi r^2h$，由此得$h=\frac{A}{\pi r^2}$，$y=2\pi rhk+2\pi r^2k=2k(\frac{A}{r}+\pi r^2)$. (6 分)

由于 $y'(r)=2k(-\frac{A}{r^2}+2\pi r)$，$y''(r)=2k(\frac{2A}{r^3}+2\pi)>0$，所以 $y(r)$ 在驻点处达最大值.（9分）

令 $y'=0$ 得驻点 $r_0=\sqrt[3]{\frac{A}{2\pi}}$，于是，$\frac{r_0}{h}=\frac{\pi r_0^3}{A}=\frac{1}{2}$.（11分）

九、1. π 在 M 处的切平面法向量为 $(6,8,-10)$，切平面方程为 $3x+4y-5z=1$.（6分）

2. 所求平面 P 与 $3x+4y+5z+8=0$ 平行，其法向量为 $(3,4,5)$，得 P 的方程为

$3(x-\frac{1}{3})+4(y-\frac{1}{3})+5(z-\frac{1}{3})=0$，即 $3x+4y+5z=3$.（10分）

交线 L 的切向量为 $(3,4,5)\times(3,4,-5)=(-40,30,0)$，切向量为 $\pm(-\frac{4}{5},\frac{3}{5},0)$.（12分）

十、(此题可以化为无条件极值来解) 求 $z=x^2+2y^2$ 在约束条件 $x+y=1$ 下的最小值.（2分）

用 Lagrange 乘数法. 令 $F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2+\lambda(x+y-1)$.（2分）

由 $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2x+\lambda=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=4y+\lambda=0\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x+y-1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{1}{3}\\ \lambda=-\frac{4}{3}\end{cases}$. 由此得驻点 $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.（8分）

由实际问题知最小值是存在的，而且在驻点达到，即 $z=\frac{2}{3}$. 所求的点 $M=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.（10分）

十一、由特征方程，得齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$.（5 分） 令该方程的特解为 $y^*=v(x)e^x+u(x)e^{2x}$.（6 分） 代入方程便得到 $\begin{cases}v'+e^xu'=0\\ v'+2e^xu'=x\end{cases}$. 解之得 $v'=-x$，$u'=xe^{-x}$，即 $v=-\frac{1}{2}x^2$，$u=-(x+1)e^{-x}$. 于是，$y^*=-(\frac{1}{2}x^2+x+1)e^x$.（10分） 因此，该方程的通解为 $y=-(\frac{1}{2}x^2+x+1)e^x+C_1e^x+C_2e^{2x}$.（11 分）

十二、因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2n+1)|x|^n}=|x|$，所以当 $|x|<1$ 时，该级数收敛.（4 分）注意到当 $x=1$ 和 -1 时，对应的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n$ 都发散，所以收敛域为 $(-1,1)$.（6 分）

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$，则 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=2x\frac{d}{dx}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt\right)+\frac{1}{1-x}$

$=2x\frac{d}{dx}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)+\frac{1}{1-x}=2x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)+\frac{1}{1-x}=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}$，$(|x|<1)$

（10 分）