2003年硕士生入学考试 <离散数学> 试题

一.判断下列论题的正确性,请给出简要说明或反例: (40%，每小题判断 2 分，说明 2 分)

1. 设论域 $D=\{x \mid x\in R, 0\leqslant x^2\leqslant 16\}$，$Q(x,y)$: x 整除 y 为给定的二元谓词，那么谓词命题 $(\exists x)(\forall y)Q(x,y)$ 在论域 D 上是有效的.________

2. 设 $A(p,q,r)$ 为含有 3 个命题符号的命题公式，已知有 $A(p,q,r)\Leftrightarrow p\wedge(\neg q\wedge r)$,那么必有 $A^*(\neg p,q,r)\Leftrightarrow p\rightarrow(\neg q\wedge r)$.（其中 A*是 A 的对偶公式）.__________

3. 设 R，S 都是集合 A 上的二元关系，已知 $(R\circ S)^C$ 是一相容关系，那么必可得 $R\cap S$ 也是相容关系。__________

4. 存在集合 A 到 2^A 的函数 f：$A\rightarrow 2^A$，如果 $S=\{x \mid x\in f(x), x\in A\}$，那么必有 $y\in A$，使 $f(y)=S$。__________

5. 已知 A 是一可数集，那么 A 的 n 次笛卡儿积 A^n 也是可数集。______

6. 已知代数系统〈B，*〉中含有幺元 e，且 B 是 A 的子代数系统。那么幺元 e 也是代数系统〈A，*〉的幺元。__________

7. 设 H 是群〈G，*〉的子群，a，b∈G，已知 aH=bH，那么 $a*b^{-1}\in H$ 。________

8. 已知〈R1，★，◇〉，〈R2，★，◇〉是两个域代数，那么〈R1∪R2，★，◇〉也是一个域代数。可以找到一些域它们不是整环。__________

9. 已知〈A，≤〉是布尔格，如果 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c$，那么 $a\wedge\bar{c}=0$ 。______

10. 已知 G=〈V, E〉为一无向连通图，且 $|E|\geqslant|V|$，那么 G 中所有循环的个数为 $|E|-|V|+1$。

____

二．填空：（每空 2 分，80%）

1．设 A={0，1，…，5}，R={〈x，y〉｜x≡y（mod3）}，S={〈x，y〉｜∃k∈I（整数），y=k·x，}，求 $(R\circ S)^C$= ________________，

s（R）∘r（S）= ________________，$t(R)^5$= ________________。

（r，s，t 为闭包符号）。R 的关系性质为 ________________，S 的性质为 ________________，它们分别是 ________ 关系和 ________ 关系。

2．设命题公式 $A=(\neg P \bar{\vee} Q)\bar{\vee}(\neg Q \bar{\vee} R)$，求在真值指派（P/1，Q/0，R/1）下 A 的真值为 ______ 。¬A 的主析取范式的编码为 Σ ________________，

其对偶公式 A*的主合取范式的编码为 Π ________________ 。

3．设|A|=3，其幂集 $2^A=\{A_0，A_1，\cdots，A_7\}$，已知 $B=\{A_0，A_2，A_3，A_5，A_7\}$，〈B，⊆〉 ________ （是/否）〈$2^A$，⊆〉的子格，〈B，⊆〉 ________ （是/否）一个分配格，

〈B，⊆〉的上界为 ____________，上确界为 ______，计算 $A_2\vee(A_3\wedge A_7)$= ____________。

4．谓词命题公式 $(\forall x)(P(x,y)\rightarrow(\ni y)Q(x,y))$ 的前束范式 ________________

给出论域 D={1，2}，写出上述公式的命题展开形式 ________________

________________。（提示：$(\forall x)A(x)$=A（1）∧A（2））

5．设 S={a，b}，〈S，*〉是一半群，已知 a*a=b，那么 b*b= ____________，如果 S 是独异点，那么 S 的幺元是 ____________。这样的 S（一定是/不一定是） ________ 群。

6．设〈S_4，∘〉为 4 次对称群，f={〈1，2〉，〈2，4〉，〈3，1〉，〈4，3〉}∈S_4，f 能生成 S_4 的 ________ 阶子群（记为 H）。在 S_4 中与 H 子群同构的其它子群有 ________ 个，子群 H ________ （是/否）S_4 的循环子群。由 H 诱导的划分其指数为 ____________。

7．已知 I 为整数集，+，·为算术加法和乘法，那么〈I，+，·〉为 ________ 结构，那是因为〈I，+〉为 ________________，〈I，·〉为 ________________，且·运算满足 ________________，和 ________________。

8．格〈A，≤〉所诱导的格代数为 ________________，该代数必满足 ____________，____________，____________ 等性质。在 A 上与关系式 a≤b 等价的运算式为 ____________，和 ____________。

9．连通并且 ____________ 的无向图被称为无向树，满足条件 ________________ 和 ________________ 的有向树被称为根树。当 T 是一棵完全二叉树，T 的叶结点个数 t 与分支点个数 n 之间的关系式为 ____________，从 ________________ 的路径被称为内通路，一条长度为 h 的外通路中包含有 ________ 条内通路。

三．证明：　（每题 10 分 30%）

1．已知 R 是群〈G，*〉上的同余关系，证明：恰有一个同余类$[a]_R$ 是 G 的正规子群。

2．设 f：A→B 是 A 到 B 的单同态映射。已知$\langle f(A), \leqslant_2\rangle$是布尔格，证明：$\langle A, \leqslant_1\rangle$是布尔格。

3．设 G=〈V，E〉是连通简单平面图，已知结点数$|V|=6$，边数$|E|=12$，证明：G 的每个面的度数为 3。（即每面由 3 边围成）