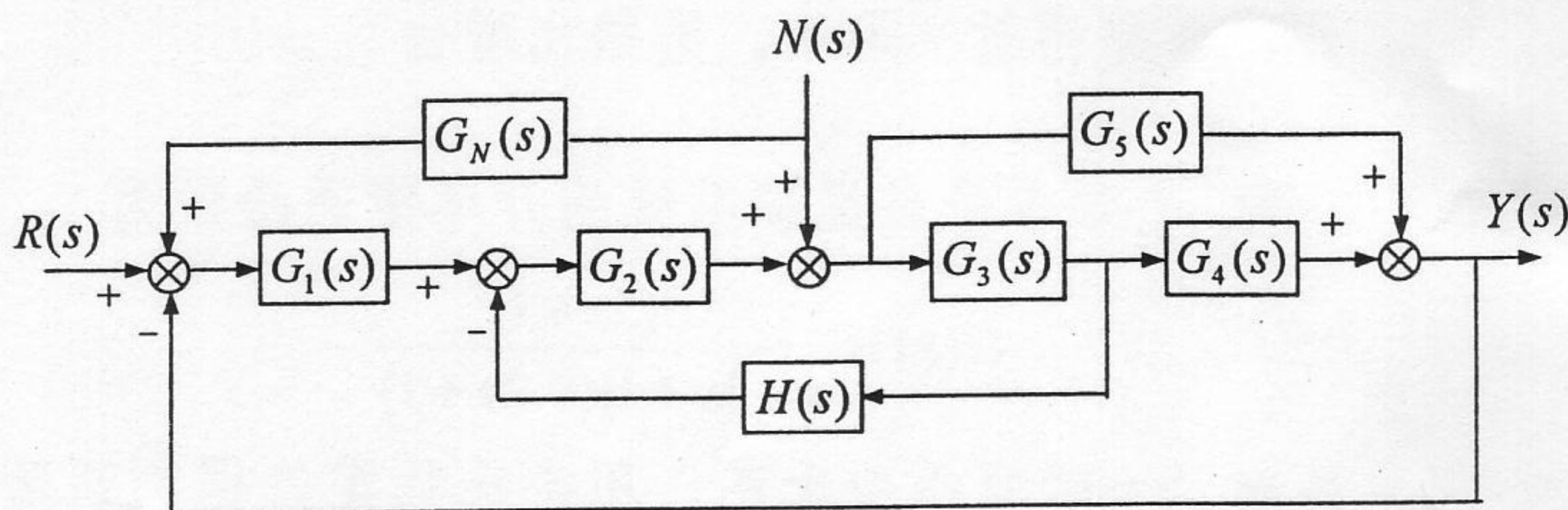




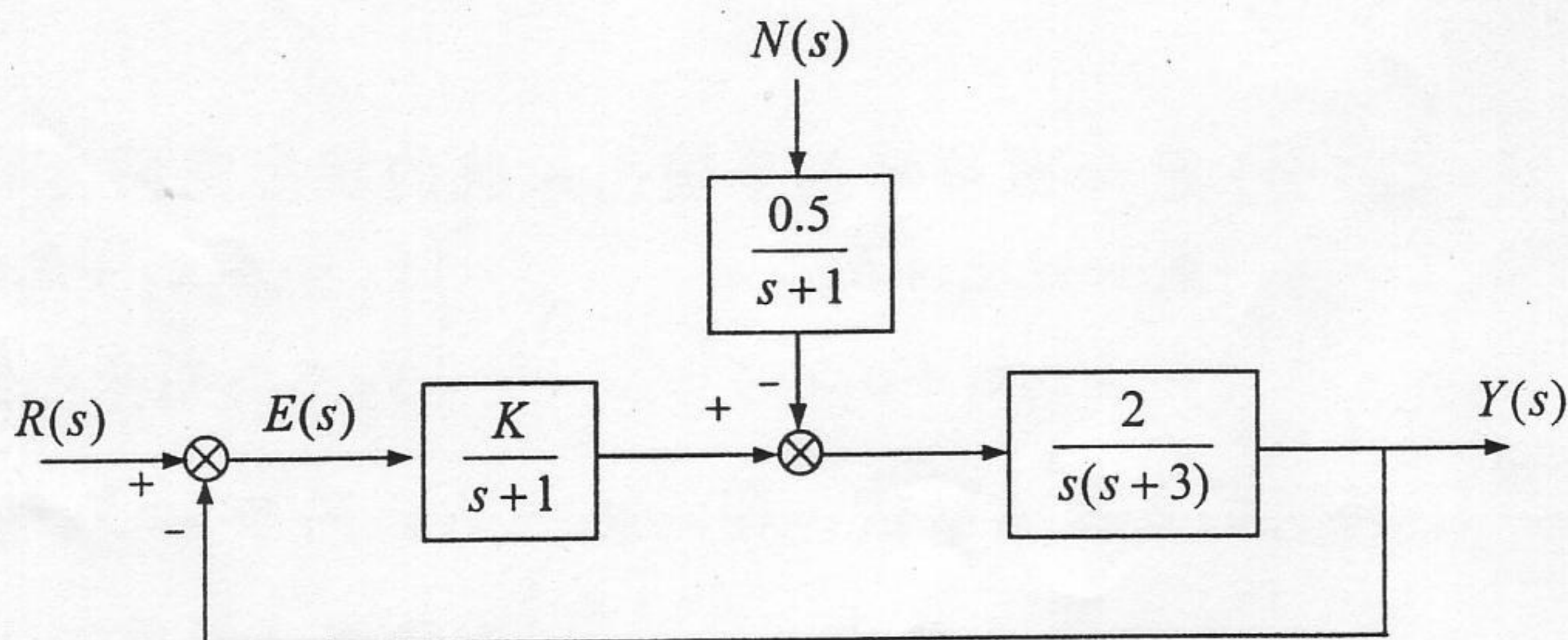
中国科学院 - 中国科学技术大学
2004 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称: 自动控制理论

一、(20 分) 控制系统方块图如下图所示。试用化简方块图方法，求闭环传递函数 $Y(s)/R(s)$ 和 $Y(s)/N(s)$ 。



二、(22 分) 控制系统如下图所示，设输入信号 $r(t) = 2t$ ，干扰信号 $n(t) = 1(t)$ 。



1. 试确定系统的稳态误差 e_{ss} 。
2. 若要求系统的稳态误差 $e_{ss} \leq 0.1$ ，试提出达到这一稳态性能指标的方法。

中国科学院 & 中国科学技术大学

2004 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

七、1. 系统的能控性矩阵 M_c 和能观性矩阵 M_o 分别是

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$M_o M_c = \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & CA^3B & \dots & CA^nB \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \dots & CA^{n+1}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & CA^{n+1}B & \dots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & CA^{n-1}B \\ 0 & 0 & 0 & CA^{n-1}B & * \\ 0 & 0 & CA^{n-1}B & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{n-1}B & * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

这是一个下三角矩阵，反对角线上元素全非零当然矩阵满秩。根据矩阵理论必有 M_o 、 M_c 均满秩。所以系统既能控又能观。

2. 系统 $\{A, b, c\}$ 的传递函数为: $G(s) = c(sI - A)^{-1}b = N(s)/D(s)$

其分母（首一多项式）是 $D(s) = \det(sI - A)$

今构造单位输出正反馈: $u = v + y$

于是，闭环系统的状态空间方程为: $\dot{x} = (A + bc)x + bv$; $y = cx$

它的传递函数当然是: $G_o(s) = c(sI - A - bc)^{-1}b = N_o(s)/D_o(s)$

其分母（首一多项式）是 $D_o(s) = \det(sI - A - bc)$

而 $G(s)$ 与 $G_o(s)$ 间有关系:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{N_o(s)}{D_o(s) + N_o(s)} = \frac{D(s) - D_o(s)}{D(s)}$$

将上述结果代入之就是所要的。

三、(24 分) 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

1. 绘制系统的根轨迹图(不要求求出分离点)。
2. 已知系统的一个闭环极点为 -0.9 , 试求出其余的闭环极点。
3. 该系统是否可以用低阶系统来近似? 若能, 则求出它的闭环传递函数; 若否, 则给出理由。

四、(24 分) 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10(5s+1)}{s^2(2s+1)(0.2s+1)}$$

1. 画出 $G(s)$ 的完整奈氏图, 用奈氏稳定判据判断闭环系统的稳定性。
2. 如果系统不稳定, 试设计一串联校正装置, 使闭环系统稳定。画出相应的完整奈氏图, 并给出校正装置的参数。

五、(20 分) 已知两单输入单输出系统的状态空间方程分别是:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u_1 \\ y_1 = c_1 x_1 + d_1 u_1 \end{cases}, \quad S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u_2 \\ y_2 = c_2 x_2 + d_2 u_2 \end{cases}$$

1. 将它们负反馈联接, 即: $u_2 = y_1$, $u_1 = v - y_2$, 试以 v 为输入, $y = y_1$ 为输出, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 为状态, 求反馈系统的状态空间方程;
2. 当 $A_1 = -1, b_1 = 1, c_1 = 1, d_1 = 1$, $A_2 = -2, b_2 = 1, c_2 = 1, d_2 = 0$, $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$, 且输入 v 是幅值为 2 的阶跃信号时, 求状态 $x(t)$ 的表达式及输出 $y(3)$ 的值。

六、(24 分) 已知系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 + 2u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

1. 判断系统的渐近稳定性和 BIBO 稳定性;
2. 若可能, 设计状态反馈使闭环系统的极点位于 $-2 \pm j2$;
3. 当系统的状态不可直接量测时, 若可能, 设计极点均位于 -6 处的最小维状态观测器;
4. 用你得到的观测状态实现你设计的状态反馈, 给出实现你所设计的复合系统结构图。

七、(16 分) 对 n 维线性定常单输入 - 单输出系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

1. 已知 $\mathbf{c}\mathbf{A}^i\mathbf{b} = 0, (i = 1, 2, \dots, n-2)$, 但 $\mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \neq 0$, 试证明该系统是既能控又能观的;
2. 证明该系统的传递函数是:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{c})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

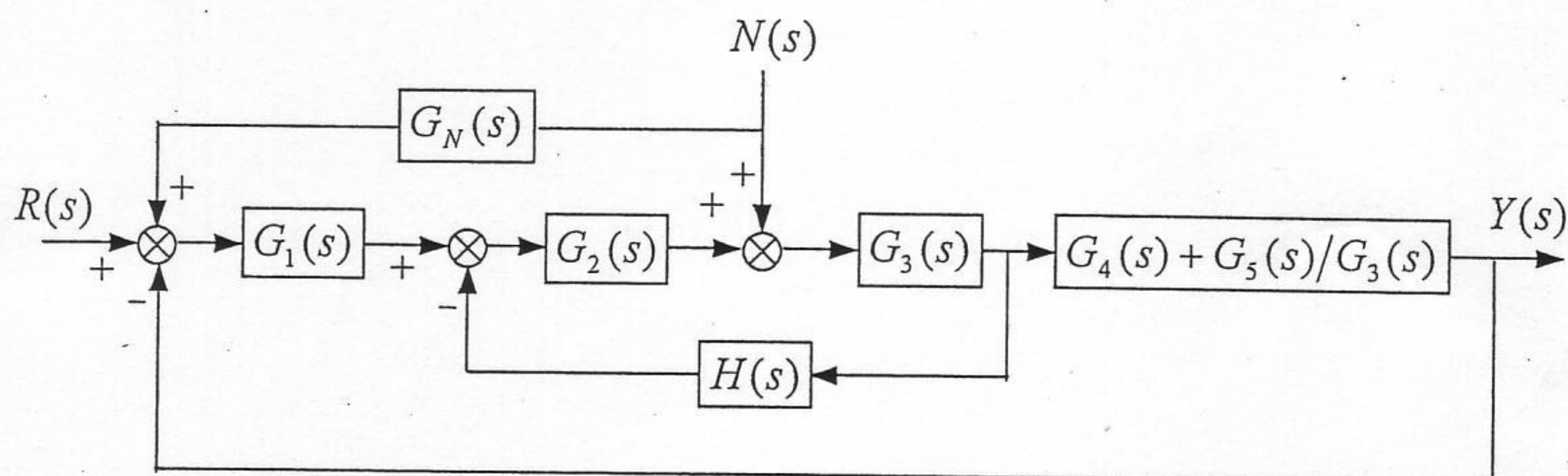
2004

中国科学院 & 中国科学技术大学

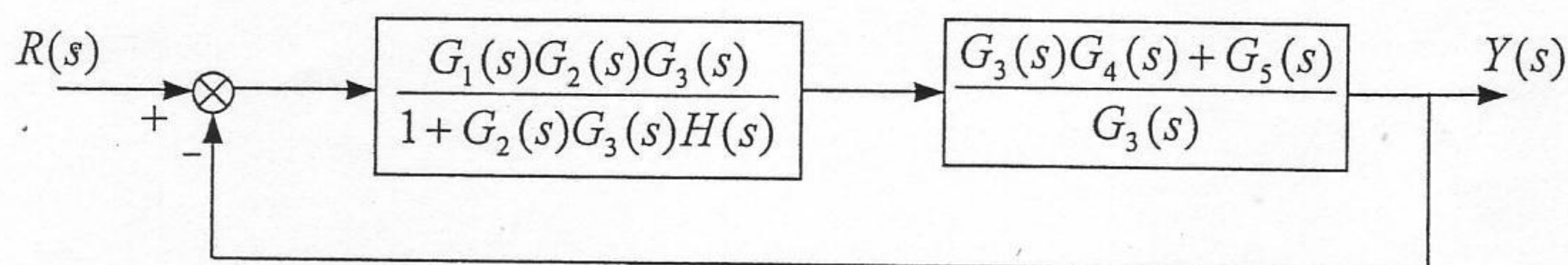
2004 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

试题名称：自动控制理论

一、

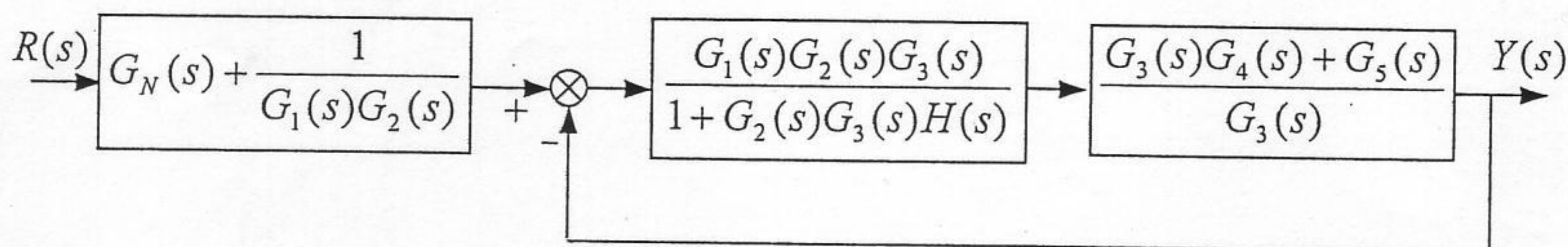


1. $R(s) \neq 0, N(s) = 0$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)[G_3(s)G_4(s) + G_5(s)]}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s) + G_2(s)G_3(s)H(s) + G_1(s)G_2(s)G_5(s)}$$

2. $R(s) = 0, N(s) \neq 0$



$$\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{[G_N(s)G_1(s)G_2(s) + 1][G_3(s)G_4(s) + G_5(s)]}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s) + G_2(s)G_3(s)H(s) + G_1(s)G_2(s)G_5(s)}$$

中国科学院 & 中国科学技术大学
2004 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

二、

$$1. \quad R(s) = \frac{2}{s^2}, \quad N(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{ssR} = \frac{2}{K_v} = \frac{3}{K}$$

$$E_N(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)+2K} \cdot N(s)$$

$$\therefore e_{ssN} = \lim_{s \rightarrow 0} sE_N(s) = \frac{1}{2K}$$

$$\therefore e_{ss} = e_{ssR} + e_{ssN} = \frac{7}{2K}$$

但为保证系统闭环稳定，必须要满足 $0 < K < 6$ 。

$$2. \quad \because e_{ss} = \frac{7}{2K} \leq 0.1 \quad \Rightarrow \quad K \geq 35$$

为保证系统闭环稳定，可在系统的前向通道、扰动的作用点之前，加一比例-微分控制器，取 $K(s) = s + 2$ ，使闭环系统在 $K > 0$ 时均能稳定。

取 $K \geq 17.5$ ，即满足稳态性能要求。

中国科学院 & 中国科学技术大学
2004 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

三、

1. 渐近线: 2 条;

$$\theta_a = \pm 90^\circ;$$

$$-\sigma_a = -2$$

根轨迹图: 略。

2. 已知: $-\lambda_1 = -0.9 \Rightarrow k = 20.79$

设其它二个闭环极点为 $-\lambda_2, -\lambda_3$

则 $-\lambda_{2,3} = -2.05 \pm j4.35$

3. $-\lambda_1 = -0.9$ 和 $-z = -1$ 构成一对闭环偶极子

故系统可降阶为二阶系统。其闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2079(s+1)}{(s+0.9)(s+2.05+j4.35)(s+2.05-j4.35)} \approx \frac{23.1}{s^2 + 4.01s + 23.5}$$

中国科学院 & 中国科学技术大学
2004 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

四、

1. 开环传递函数 $G(s)$ 的完整奈氏图：略。

设 $G(s)$ 的幅相特性与负实轴的交点为 a ，求出该点的坐标：

$$\text{据 } \angle G(j\omega_a) = -180^\circ \Rightarrow \omega_a^2 = 1.4$$

$$\Rightarrow |G(j\omega_a)| = 16.5$$

故 $(-1, j0)$ 点位于 $(-a, 0)$ 之间， $G(s)$ 的奈氏图顺时针包围 $(-1, j0)$ 点两次，有

$$n_c = N + n_0 = 2$$

故闭环系统不稳定。

2. 设计比例-微分控制器 $K(s) = 1 + Ts$ ($T > 0.2$)。

取 $T = 2$ ，校正后系统的完整奈氏图：略。。

则 $G(s)K(s)$ 的封闭轨迹以顺时针和反时针各包围 $(-1, j0)$ 点两次，故 $n_c = 0$ ，闭环系统稳定。

中国科学院 & 中国科学技术大学
2004 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

六、 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; c = [1 \quad -1]$

1. 由 $\det(\lambda I - A) = 0$ 可解得：系统的两个特征值分别为 $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -1$ 均具有负实部，故系统渐近稳定，当然也是 BIBO 稳定的。

2. 因 $Mc = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ 满秩，故系统能控，可用状态反馈任意配置系统的闭环极点。设实现题目要求的状态反馈为 $u = v - kx$ ，则

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A - bk) &= (\lambda + 2 - j2)(\lambda + 2 + j2) = \lambda^2 + 4\lambda + 8 \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda + 2 - k_1 & -1 - k_1 \\ -1 - 2k_2 & \lambda + 3 - 2k_2 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + (5 - k_1 - 2k_2)\lambda + (5 - 4k_1 - 6k_2) \end{aligned}$$

解得： $k_1 = -6, k_2 = 3.5$ 即题目要求的状态反馈为

$$u = v - [-6 \quad 3.5]x$$

3. 因 $Mo = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ 满秩，故系统能观，可以用状态观测器实现状态观测。又因 c 的秩为 1，故最小维状态观测器应为 1 维，取

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{则} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = Qb = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \bar{c} = cQ^{-1} = [0 \quad 1]$$

即

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + u, \quad \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_1 - 4\bar{x}_2 - u, \quad y = \bar{x}_2$$

或

中国科学院 & 中国科学技术大学
2004 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 - y + u, \quad \bar{y} = \bar{x}_1 = \dot{y} + 4y + u$$

在上式中以 $u - y$ 为输入, \bar{x}_1 为状态 w , $\bar{y} = \bar{x}_1 = \dot{y} + 4y + u$ 为输出构造等维观测器:

$$\dot{w} = (-1 - L)w + L(\dot{y} + 4y + u) + u - y, \quad \hat{\bar{x}}_1 = w$$

其中 $(-1 - L)$ 是观测器的极点, 故 $L = 5$
为消去微分项令 $z = w - Ly$, 则

$$\dot{z} = (-1 - L)z + (3L - L^2 - 1)y + (L + 2)u$$

即 $\dot{z} = -5z - 11y + 7u$ 而

$$\hat{x} = Q^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} z + Ly \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z + 5y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} y$$

上两式就是要求的观测器

$$\dot{z} = -5z - 11y + 7u, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} y$$

4. 图略