

试题名称: **概 率 统 计** (注: 要求使用计算器)

一、(25 分) 对飞机进行三次独立的射击, 三次射击的命中率分别为 0.4, 0.5 和 0.7。飞机被击中一次而坠落的概率为 0.2, 被击中两次而坠落的概率为 0.6, 若被击中三次, 则飞机必然坠落。试求:

- (1) 射击三次而击落飞机的概率;
- (2) 射击两次而击落飞机的概率;
- (3) 已知飞机被击落, 问它在第几次射击时被击落的可能性最大?

二、(15 分) 设 X 与 Y 独立, 且

$$X \sim f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

试求 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$ 。

三、(25 分) 将数字 1, 2, ..., n 任意排为一列, 定义:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 个位置上恰是数字 } i \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 个位置上不是数字 } i \end{cases}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

试求: (1) 期望 $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = ?$ (2) 方差 $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = ?$

四、(30分) 罐中有 N 个硬币，其中有 θ 个是普通硬币（掷出正面与反面的概率各为 0.5），其余 $N-\theta$ 个硬币两面都是正面。从罐中随机取出一个硬币，将它连掷两次，记下结果，然后将其放回罐中，如此重复 n 次。若掷出 0 次，1 次，2 次正面的次数分别为 n_0, n_1, n_2 ，试求：

(1) θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ ；

(2) θ 的极大似然估计 θ^* ；

(3) $\hat{\theta}$ 是无偏的吗？ θ^* 呢？

五、(30分) 设总体 $X \sim f(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & 0 < x < \lambda \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, (X_1, X_2, X_3, X_4)$

为取自总体 X 的样本，记：

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{5}{4} \max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad \hat{\lambda}_2 = 5 \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

(1) 试证明 $\hat{\lambda}_1$ 与 $\hat{\lambda}_2$ 皆为 λ 的无偏估计；

(2) 比较 $\hat{\lambda}_1$ 与 $\hat{\lambda}_2$ 何者更为有效？

六、(25分) 为了解甲、乙二企业职工工资水平，分别从二企业各抽取 7 名职工调查，得如下数据（单位：十元）：

甲企业： 75, 106, 75, 182, 114, 105, 100

乙企业： 100, 190, 90, 180, 120, 170, 195

设二企业职工工资分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，二总体

独立，问：

(1) 是否可以认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$? ($\alpha = 0.05$)

(2) 甲企业职工平均工资是否低于乙企业职工平均工资? ($\alpha = 0.05$)。

[参考数据：

$$t_{0.025}(12) = 2.1788, \quad t_{0.05}(12) = 1.7823, \quad t_{0.025}(13) = 2.1604$$

$$t_{0.05}(13) = 1.7709, \quad t_{0.025}(14) = 2.1448, \quad t_{0.05}(14) = 1.7613$$

$$F_{0.025}(6,6) = 5.82, \quad F_{0.05}(6,6) = 4.28, \quad F_{0.025}(7,7) = 4.99$$

$$F_{0.05}(7,7) = 3.79 \quad]$$

试题名称:

概 率 统 计

一、(25 分): (1) 0.458; (2) 0.22; (3) 第三次射击时被击落可能性最大。

二、(15 分):
$$f_z(z) = \begin{cases} z^2, & 0 \leq z \leq 1 \\ 2z - z^2, & 1 < z \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} .$$

三、(25 分): (1) 1; (2) 1 .

四、(30 分): (1) $\hat{\theta} = \frac{N}{n}(2n_0 + n_1)$; (2) $\theta^* = \frac{4N}{3n}(n_0 + n_1)$;

(3) $\hat{\theta}$ 无偏, θ^* 有偏。

五、(30 分): (1) $E(\hat{\lambda}_1) = E(\hat{\lambda}_2) = \lambda$; (2) $\hat{\lambda}_1$ 更有效。

六、(25 分): (1) 可以认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$; (2) μ_1 低于 μ_2 。