试题名称: **高等数学 A**

注意:填空、选择题的答案必须答在答题纸上.

一、 填空题:(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

1. 已知 $f'(x_0)=3$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-2x)}{x}=$________

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{x^2}, 则 $\int xf'(x)dx=$________

3. 数量场 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在点 $(1,1,-1)$ 的最大方向微商值为________

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n+3^n}$ 的收敛半径为________

5. 微分方程 $y'-\dfrac{1}{x}y=1$ 的通解为________

二、 选择题(本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分. 每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的.)

1. 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

(A) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^2}f(t^2)$ 存在 (B) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^2}f(t-\sin t)$ 存在

(C) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}f(\ln(1+t))$ 存在 (D) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}[f(2t)-f(t)]$ 存在 [ ]

2. 设曲面 $x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=1$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的法线为 L, 又设

$L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{0}$, $\pi: x+y+4z=1$, 则

(A) L 与 L_1 相交, 且 L 平行于 π

(B) L 与 L_1 相交，且 L 垂直于 π

(C) L 与 L_1 异面，且 L 平行于 π

(D) L 与 L_1 异面，且 L 垂直于 π [ ]

3. 设 S 是柱面 $x^2+y^2=R^2\ (0\le z\le R)$ 的外侧，则 $\iint\limits_S (x^2+y^2)dxdy$ 的值为

(A) $2\pi R^3$ (B) $2\pi R^4$ (C) πR^4 (D) 0 [ ]

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则下列结论中正确的是

(A) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛 (B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}\cdot a_n$ 收敛

(C) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} a_n$ 收敛 (D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 绝对收敛

[ ]

5. 设 $f(x)=x-L\ (0\le x\le 2L)$，则其以 $2L$ 为周期的富里叶级数在点 $x=-\frac{L}{2}$ 处收敛于

(A) $-\frac{L}{2}$ (B) $-\frac{3L}{2}$ (C) $\frac{L}{2}$ (D) $\frac{3L}{2}$ [ ]

三、(5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$.

2. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$.

3. 利用欧拉积分计算 $\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt[6]{1-x^6}}dx$.

4. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(xy^2,\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 计算二重积分 $\int_0^1 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \cos y^2 dy$.

四、(3 小题, 每小题 12 分, 满分 36 分)

1. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=1, f'(0)=1$，且曲线积分 $\int_L (e^x \sin y + 2yf'(x) + 2xy)dx + (f'(x) + f(x) + 2x + e^x \cos y)dy$ 与路径无关

(1) 求 $f(x)$.

(2) 当 L 是从 $(0,0)$ 沿曲线 $y=x^4$ 到 $(1,1)$ 的有向曲线段时, 求以上曲线积分的值.

2. 将函数 $y = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ 在 $x=0$ 处展成泰勒级数, 并求收敛域及 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

3. 将函数 $f(x)=\begin{cases}\pi & -\pi \le x < 0 \\ \pi - x & 0 \le x \le \pi\end{cases}$ 展成周期 2π 的富里叶级数(说明收敛情况), 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

五、(2 小题，每小题 12 分，共 24 分)

1. 设 $f(x)$ 在[0，1]连续，在（0，1）可导，$f(0)=0, f(1)=2$.

证明:（1）存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $f(\xi)=1$.

（2）存在 $0<x_1<x_2<1$, 使 $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=1$.

2. （1）求 $F(x)=\int_0^a |t-x|\,dt$（常数 $a>0$）在 $[0,a]$ 上的最小值.

（2）设 $f(x)$ 在 $[0,a]\,(a>0)$ 连续, 且 $\int_0^a f(x)dx=0$, $\int_0^a xf(x)dx=1$. 求证: 存在一点 $x_0\in[0,a]$, 使 $|f(x_0)|\ge\frac{4}{a^2}$.

杨侬

2005年高等数学A 参考答案

一. 填空题（每小题5分）

1. 6　　2. $(2x^2-1)e^{x^2}+C$　　3. $2\sqrt{14}$

4. $\sqrt{3}$　　5. $y=x(C+\ln|x|)$

二. 选择题（每小题5分）

1. C　　2. A　　3. D　　4. B　　5. C

三.（每小题8分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$　　令 $\sin x=y$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{(\arcsin y)^3}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{3y^2}=\frac{1}{6}.$$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$　　令 $x=\tan t$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t\cdot\sec^2 t}{(2+\tan^2 t)\sec t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\,dt}{2\cos^2 t+\sin^2 t}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos t}{1+\cos^2 t}$$

$$=-\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

3. $\displaystyle\int_0^1\frac{x^6}{\sqrt[6]{1-x^6}}dx$　　令 $x^6=t$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{7}{6}-1}(1-t)^{\frac{5}{6}-1}dt=\frac{1}{6}B\left(\frac{7}{6},\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{6}\frac{\Gamma(\frac{7}{6})\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(2)}$$

$$=\frac{1}{36}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{36}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{18}.$$

4. $z=f\left(xy^2,\dfrac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y\frac{\partial f}{\partial u} + y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 2xy + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$-\frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\cdot 2xy + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= 2y\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v} + 2xy^3\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{y^2}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

5. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^1 \cos y^2 \, dy$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{y^3} \cos y^2 \, dx = \int_0^1 y^3 \cos y^2 \, dy = \frac{1}{2}\int_0^1 t\cos t \, dt$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$$

四（每题12分）

1 (1) $P = e^x \sin y + 2y f'(x) + 2xy \qquad Q = f'(x) + f(x) + 2x + e^x \cos y$

因曲线积分与路径无关，故有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

即 $f''(x) + f'(x) + 2 + e^x \cos y = e^x \cos y + 2f'(x) + 2x$

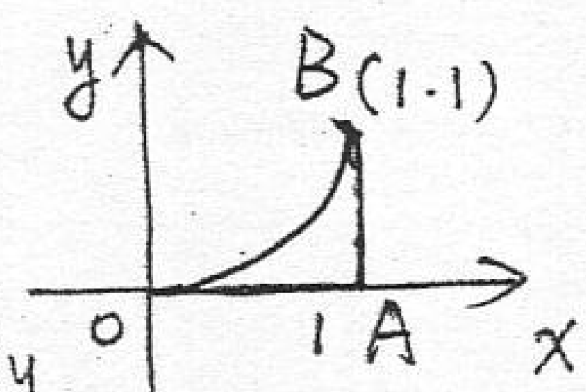
解初值问题 $\begin{cases} f''(x) - f'(x) = 2x - 2 \\ f(0) = 1, \ f'(0) = 1 \end{cases}$

通解为 $y = C_1 + C_2 e^x - x^2$. 由 $f(0) = f'(0) = 1$ 得 $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

求得 $f(x) = e^x - x^2$

(2) 因曲线积分与路径无关，取 L 为 $\overline{OA} + \overline{AB}$

$\overline{OA}$: $y \equiv 0$, $0 \le x \le 1$; $\overline{AB}$: $x \equiv 1$, $0 \le y \le 1$.



$$\int_L (e^x \sin y + 2y f'(x) + 2xy)\,dx + (f'(x) + f(x) + 2x + e^x \cos y)\,dy$$

$$= \int_{\overline{AB}} (f'(1) + f(1) + 2 + e\cos y)\,dy$$

$$= \int_0^1 (2e - 1 + e\cos y)\,dy = 2e - 1 + e\sin 1 = e(2 + \sin 1) - 1$$

2.（方法1） $y=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$$y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}=\arctan x,\quad y''=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad |x|<1$$

$$y'(x)-y'(0)=\int_0^x y''dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad y'(0)=0\quad |x|\le 1$$

$$y(x)-y(0)=\int_0^x y'dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\quad |x|\le 1，\text{又 } y(0)=0$$

所以 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$， 收敛域 $|x|\le 1$

令 $x=1$，得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}=y(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.

（方法2）也可以直接用已知函数的泰勒展式

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)},\quad |x|\le 1.$$

$$\ln(1+x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1},\quad |x|\le 1$$ 代入得

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$$ 收敛域 $|x|\le 1$.

3. $f(x)=\begin{cases}\pi & -\pi\le x<0\\ \pi-x & 0\le x\le\pi\end{cases}$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\pi dx+\int_0^{\pi}(\pi-x)dx\right]=\frac{3}{2}\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\pi\cos nx\,dx+\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx\right]=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\pi\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right]=\frac{(-1)^n}{n}$$

$$f(x)=\frac{3}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right]\quad(-\pi<x<\pi)$$

在 $x=\pm\pi$，级数收敛于 $\frac{\pi}{2}$

令 $x=0$ $\quad \pi=f(0)=\frac{3}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$

得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

五.（每题12分）

1(1) 证：因$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=0<1<f(1)=2$

由连续函数的介值定理，存在$\xi\in(0,1)$，使$f(\xi)=1$.

(2) 证：在$[0,\xi]$，$[\xi,1]$上分别用中值公式

$$f(\xi)-f(0)=f'(x_1)\cdot\xi \qquad 0<x_1<\xi$$

$$1=f'(x_1)\cdot\xi$$

$$f(1)-f(\xi)=f'(x_2)\cdot(1-\xi) \qquad \xi<x_2<1$$

$$1=f'(x_2)\cdot(1-\xi)$$

显然$f'(x_1)\neq 0$，$f'(x_2)\neq 0$. 推得

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\xi+(1-\xi)=1.$$

2(1) $F(x)=\int_0^a|t-x|dt \qquad 0\leq x\leq a$

$$=\int_0^x(x-t)dt+\int_x^a(t-x)dt=x^2-ax+\frac{a^2}{2}=(x-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{4}$$

当$x=\frac{a}{2}$时，$F(x)$有最小值$\frac{a^2}{4}$ $\quad(0\leq x\leq a)$

(2) 证：因$f(x)$在$[0,a]$连续，故$|f(x)|$在$[0,a]$连续.

必有最大值$|f(x_0)|=\max|f(x)| \qquad x_0\in[0,a]$

又已知$\int_0^a xf(x)dx=1$，$\int_0^a f(x)dx=0$

故 $1=\int_0^a xf(x)dx-\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$

$$\leq\int_0^a|(x-\frac{a}{2})f(x)|dx$$

$$\leq|f(x_0)|\cdot\int_0^a|x-\frac{a}{2}|dx=|f(x_0)|\cdot\frac{a^2}{4}$$

即存在$x_0\in[0,a]$，使$|f(x_0)|\geq\frac{4}{a^2}$.