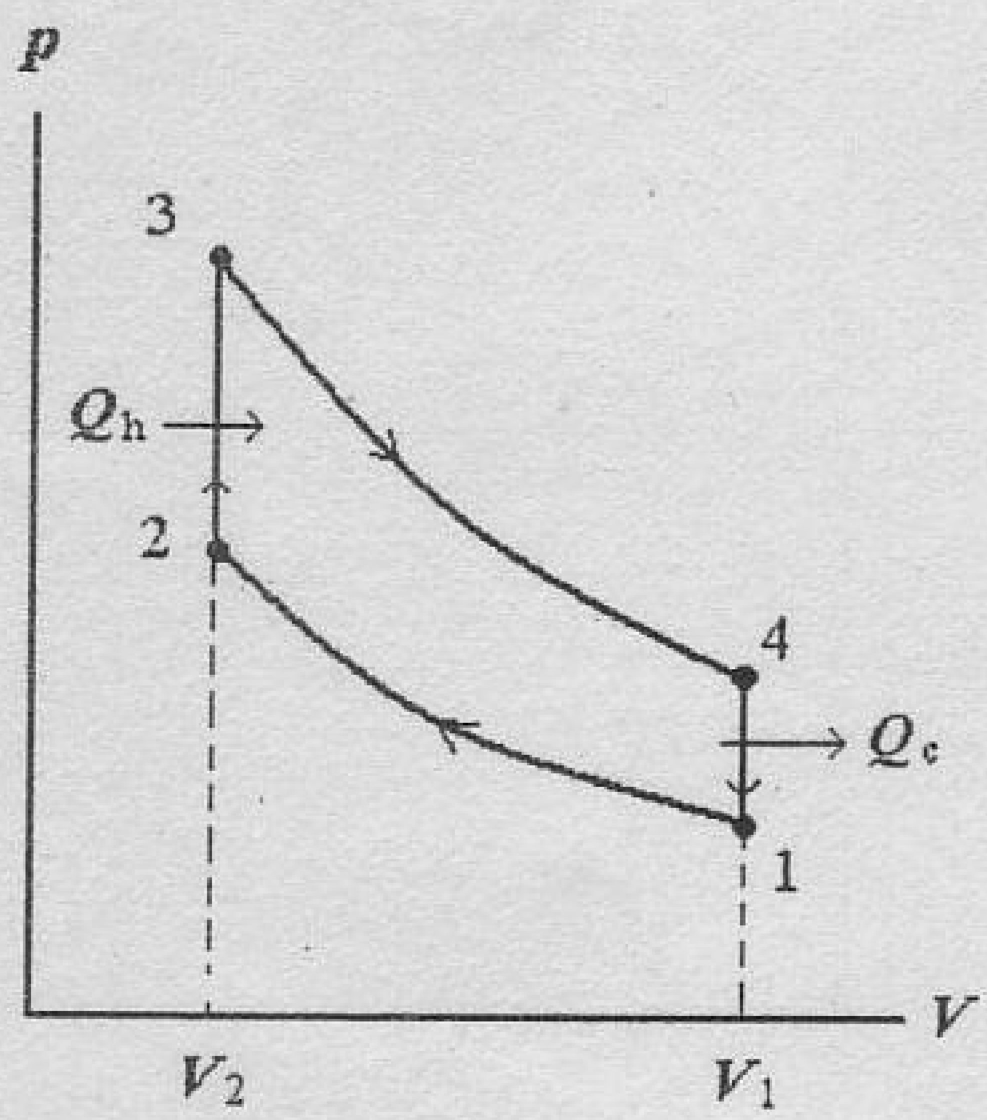
试题名称： 热力学与统计物理

一（30 分），一个理想气体执行一个由两个等容过程和两个绝热过程所组成的循环（见图），（1），给出两个绝热过程的过程方程；（2）假定等容比热为常数，计算从热源吸收的热量 Q_h 和向冷源放出的热量 Q_c；（3）证明此循环的效率 $\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$，其中 $r = \frac{V_1}{V_2}$。



二（30 分），一个理想气体在不可逆等温膨胀中，从热源吸收热量 Q，对外作功为最大功的10%，求：（1），热源的熵变；（2），气体的熵变；（3）热源和气体的总熵变。气体和热源的温度均为 T。（提示：因熵是态函数，求“气体的熵变”时，可设计一个可逆过程来计算熵变）

三（30 分），服从极端相对论性规律的粒子，它的动量能量关系为 $\varepsilon = cp$（c 为光速），设粒子的自旋为 s，求在体积 V 内，在 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 能量范围内粒子的量子态数目。

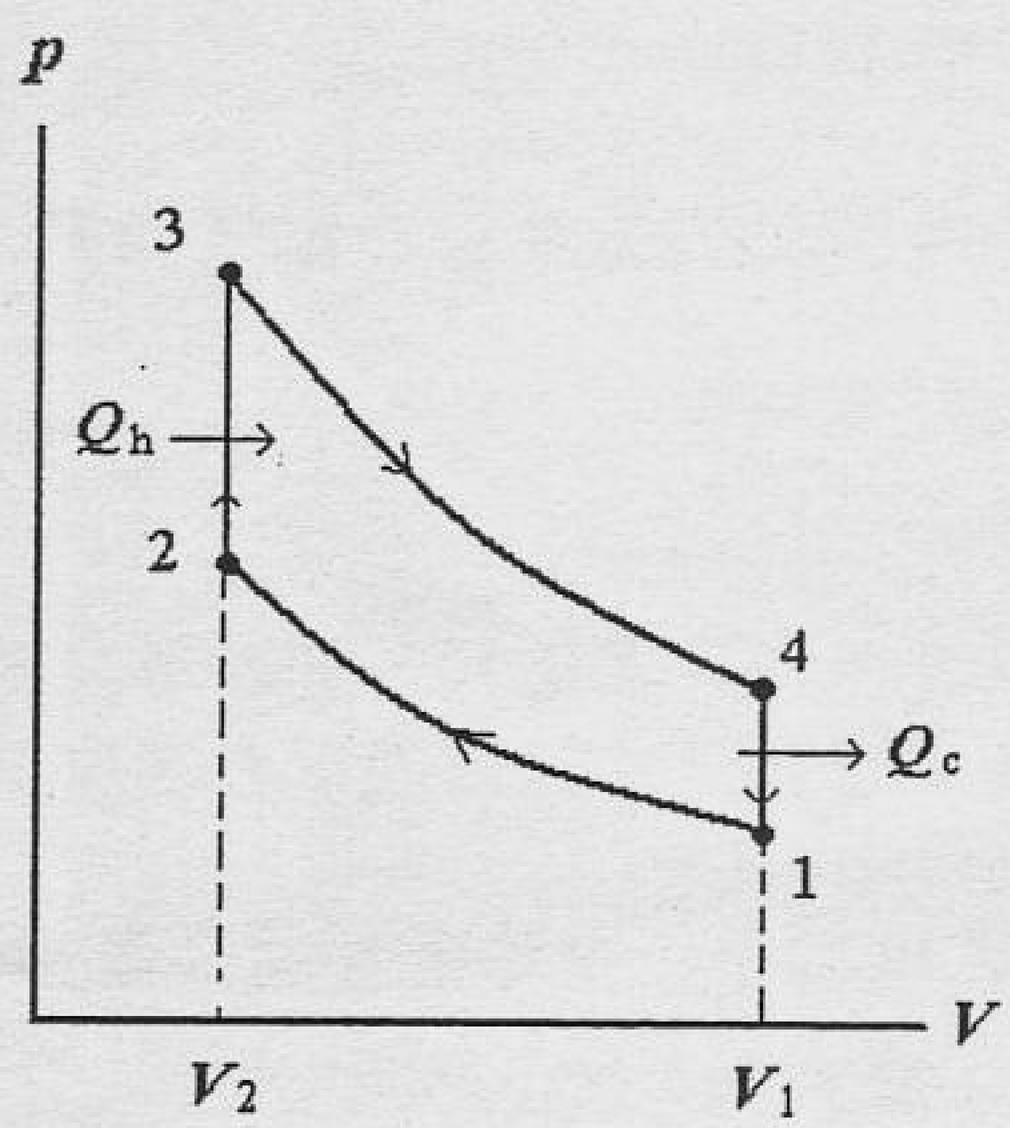
四（30 分），由单原子分子组成的一个理想气体，它的每个原子有两个内部的能态：一个是简并度为 g_1 的基态，另一个是位于基态以上能量为 ε、简并度为 g_2 的低能激发态。求此气体的内能和定容热容量。（用玻尔兹曼分布）

五（30 分），自旋 $s = \frac{1}{2}$ 的理想费米气体的体积为 V，总粒子数为 N，求绝对零度时的费米能级、费米动量和费米温度的表达式。

2005年硕士学位研究生入学考试试题参考答　案

试题名称：　　热力学与统计物理

一（30分），一个理想气体执行一个由两个等容过程和两个绝热过程所组成的循环（见图），（1），给出两个绝热过程的过程方程；（2）假定等容比热为常数，计算从热源吸收的热量 Q_h 和向冷源放出的热量 Q_c；（3）证明此循环的效率 $\eta = 1 - \dfrac{1}{r^{\gamma-1}}$，其中 $r = \dfrac{V_1}{V_2}$。



解：

（1），1→2，为绝热压缩过程，其过程方程为：

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1},$$

3→4，为绝热膨胀过程，其过程方程为：

$$T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}$$

（2），2→3，温度和压强增加，从外界吸收热量：

$$Q_h = \int_{T_2}^{T_3} C_V \, dT = C_V (T_3 - T_2)$$

4→1，温度和压强下降，向外界放出热量（设为正值）：

$$Q_c = -\int_{T_4}^{T_1} C_V \, dT = \int_{T_1}^{T_4} C_V \, dT = C_V (T_4 - T_1)$$

（3），循环的效率　$\eta = 1 - \dfrac{Q_c}{Q_h} = 1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$，

再利用上面两个绝热过程方程得：

$$(T_4 - T_1) V_1^{\gamma-1} = (T_3 - T_2) V_2^{\gamma-1}$$

代入上式：

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

试题名称： 热力学与统计物理

二（30分），一个理想气体在不可逆等温膨胀中，从热源吸收热量 Q，对外作功为最大功的10%，求：（1），热源的熵变；（2），气体的熵变；（3）热源和气体的总熵变。气体和热源的温度均为 T。（提示：因熵是态函数，求气体的熵变时，可设计一个可逆过程来计算熵变）

解：（1），热源的熵变：热源放出热量为 Q，温度为 T，故热源的熵变为：

$$\Delta S_r = -\frac{Q}{T}$$

（2），气体的熵变：设计一个可逆过程—可逆等温膨胀过程，它的初态和终态与不可逆等温膨胀过程相同。由于理想气体的内能仅是温度的函数，在等温过程中内能不变。

所以在不可逆过程中，气体吸收的热量为 Q，气体对外作的功 W 为在可逆过程中对外作的功 $W_{可逆}$（最大功）的10%，即：

$$Q = W = \frac{W_{可逆}}{10};$$

而在可逆过程中，设气体吸热为 $Q_{可逆}$，则：

$$Q_{可逆} = W_{可逆} = 10Q$$

气体的熵变为：

$$\Delta S_{gas} = \frac{Q_{可逆}}{T} = \frac{W_{可逆}}{T} = \frac{10Q}{T}$$

（3），热源和气体的总熵变为：

$$\Delta S_t = \Delta S_r + \Delta S_{gas} = -\frac{Q}{T} + \frac{10Q}{T} = \frac{9Q}{T}$$

试题名称： 热力学与统计物理

三（30 分），服从极端相对论性规律的粒子，它的动量能量关系为 $\varepsilon = cp$（c 为光速），设粒子的自旋为 s，求在体积 V 内，在 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 能量范围内粒子的量子态数目。

解：在体积 V 内，动量在 $p_x \to p_x + dp_x$，$p_y \to p_y + dp_y$，$p_z \to p_z + dp_z$ 范围内，自旋为 s 的自由粒子的量子态数为：

$$(2s+1)\frac{Vdp_x dp_y dp_z}{h^3},$$

动量大小在 $p \to p + dp$，方向在 $\theta \to \theta + d\theta$、$\varphi \to \varphi + d\varphi$ 内的量子态数为：

$$(2s+1)\frac{Vp^2 \sin\theta dp d\theta d\varphi}{h^3}$$

对 θ、φ 积分，得动量大小在 $p \to p + dp$ 内的量子态数为：

$$(2s+1)\cdot\frac{4\pi \cdot Vp^2 dp}{h^3}$$

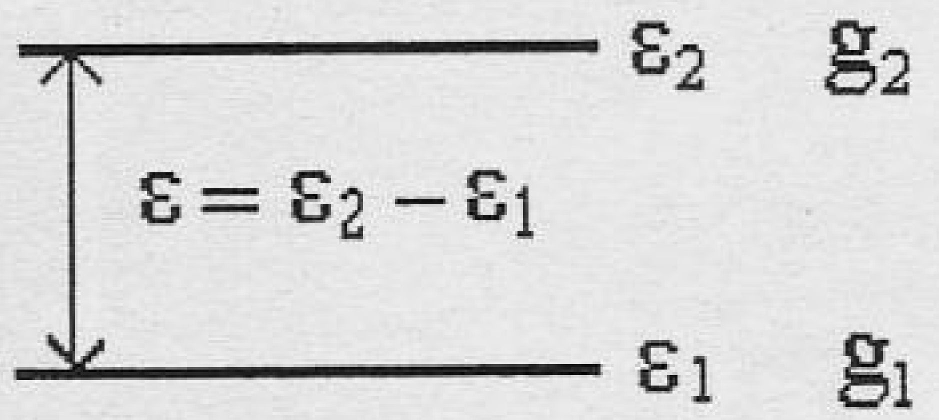
把 $\varepsilon = cp$ 代入上式，得在体积 V 内，在 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 能量范围内粒子的量子态数目为：

$$(2s+1)\frac{4\pi V}{c^3 h^3}\varepsilon^2 d\varepsilon$$

试题名称：　　　　　热力学与统计物理

四，由单原子分子组成的一个理想气体，它的每个原子有两个内部的能态：一个是简并度为 g_1 的基态，另一个是位于基态以上能量为 ε 、简并度为 g_2 的低能激发态。求此气体的内能和定容热容量。（用玻尔兹曼分布）

解：



分子的配分函数为：

$$z=\sum_{i=1}^{2}\omega_i e^{-\beta\varepsilon_i}=g_1 e^{-\beta\varepsilon_1}+g_2 e^{-\beta\varepsilon_2}$$

$$=g_1 e^{-\beta\varepsilon_1}\left[1+\frac{g_2}{g_1}e^{-\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\right]$$

$$=g_1 e^{-\beta\varepsilon_1}\left[1+\frac{g_2}{g_1}e^{-\beta\varepsilon}\right]$$

（ $\beta=\dfrac{1}{k_B T}$ ）

气体的内能为：

$$U=-N\frac{\partial\ln z}{\partial\beta}=N\varepsilon_1+\frac{Ng_2\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{g_1\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-\beta\varepsilon}\right)}$$

气体的定容热容量为：

$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=Nk_B\left(\frac{g_2}{g_1}\right)\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)^2\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-\beta\varepsilon}\right)^2}$$

（或设基态能量 $\varepsilon_1=0$，则 $z=g_1\left[1+\dfrac{g_2}{g_1}e^{-\beta\varepsilon}\right]$， $U=\dfrac{Ng_2\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{g_1\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-\beta\varepsilon}\right)}$， C_V 不变）

五（30分），自旋 $s=\frac{1}{2}$ 的理想费米气体的体积为 V，总粒子数为 N，求绝对零度时的费米能级、费米动量和费米温度的表达式。

解：　先求态密度 $D(\varepsilon)$，用第三题的公式：

动量大小在 $p\to p+dp$ 内的量子态数为：

$$(2s+1)\cdot\frac{4\pi\cdot Vp^2dp}{h^3}=\frac{8\pi Vp^2dp}{h^3}$$

因 $\varepsilon=\frac{p^2}{2m}$，$p=\sqrt{2m\varepsilon}$，$dp=\frac{1}{2}(2m)^{\frac{1}{2}}\cdot\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cdot d\varepsilon$，代入上式，

得在 ε 到 $\varepsilon+d\varepsilon$ 能量范围内的量子态数为：

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2}}\cdot d\varepsilon$$

$T=0K$ 时，气体的总粒子数为：

$$N=\int_0^{\varepsilon_F}D(\varepsilon)d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon_F}\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2}}\cdot d\varepsilon=\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\varepsilon_F^{\frac{3}{2}}$$

得 $T=0K$ 时的费米能级：

$$\varepsilon_F=\frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

由于　$\varepsilon_F=\frac{p_F^2}{2m}$，

得费米动量：

$$p_F=\sqrt{2m\varepsilon_F}=\frac{h}{2}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

和费米温度：

$$T_F=\frac{\varepsilon_F}{k_B}=\frac{h^2}{8mk_B}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{2}{3}}$$