中国科学院数学与系统科学研究院
2005 年硕士研究生招生初试试题
（ 3 小时完成，满分 150 ）

考试科目：高等代数　　　考试代码：

1. **(15 分)** 设四元齐次线性方程组 **(I)** 为 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$，又知某线性齐次方程组 **(II)** 的通解为 $k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T$. **(i)** 求线性方程组 **(I)** 的基础解系； **(ii)** 问线性方程组 **(I)** 和 **(II)** 是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解，若没有，则说明理由。

2. **(15 分)** 给定两个四维向量 $\alpha_1 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})^T$, $\alpha_2 = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T$. 求作一个四阶正交矩阵 Q, 以 α_1, α_2 作为它的前两个列向量。

3. **(20 分)(i)** 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的 **Jordan** 标准形，并计算 e^A(注：按通常定义 $e^A = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \cdots$); **(ii)** 设

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4.5 & -1 \\ -3 & -3.5 & 1 \\ -2 & -3 & 1.5 \end{pmatrix},$$

求 B^{2005}(精确到小数点后 4 位).

4. **(20 分)** 证明函数 $\log\det(\cdot)$ 在对称正定矩阵集上是凹函数, 即：对于任意两个 $n\times n$ 对称正定矩阵 A, B, 及 $\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$\log\det(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \lambda\log\det(A) + (1-\lambda)\log\det(B),$$

其中，函数 $\log\det(A)$ 表示先对矩阵 A 取行列式再取自然对数。

注：第 5 – 8 题见下页

5. **(20 分)(i)** 考虑如下形式的矩阵：

$$P=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

其中， $a_i, 1 \le i \le n$ 都为实数。证明：矩阵 P 非负定； **(ii)** 证明：非零实二次型 $f(x_1,...x_n)$ 可以写成 $f(x_1,...x_n)=(u_1x_1+...+u_nx_n)(v_1x_1+...+v_nx_n)$ 的充要条件是：或者它的秩为 1, 或者它的秩为 **2** 且符号差为 0.

6. **(20 分)** 证明：**(i)** 任何 n 阶实对称方阵 A 必合同于对角阵 $D=\mathbf{diag}\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$, 即存在 n 阶非奇异实方阵 C 使得 $C^TAC=D$, 这里 $\delta_i=-1$ 或 0 或 1; **(ii)** 任何 n 阶实反对称非奇异方阵 B 必为偶数阶 (即 $n=2k$), 且合同于块对角阵 $F=\mathbf{diag}\{J_1,J_2,\cdots,J_k\}$, 即存在 n 阶非奇异实方阵 E 使得 $E^TBE=F$, 这里 $J_i\equiv\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;**(iii)** 对迹 (对角元之和) 为 0 的 n 阶实方阵 G, 存在实正交阵 H, 使得 H^TGH 的主对角元全为零。

注：这里 C^T, E^T, H^T 分别表示 C, E, H 的转置。

7. **(20 分)** 试求 **7** 次多项式 $f(X)$ ，使 $f(X)+1$ 能被 $(X-1)^4$ 整除，而 $f(X)-1$ 能被 $(X+1)^4$ 整除。

8. **(20 分)** 给定一单调递减序列 $b_1>b_2>\cdots>b_p>0$, 定义

$$\beta=\left(p!\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{\min\limits_{1\le k\le p-1}(b_k-b_{k+1})}}.$$

假设复数 $a_i, i=1,2,\ldots,p$ 满足 $|a_i|>\beta|a_{i+1}|, i=1,2,\cdots,p-1$, 且 $|a_p|\ge 1$. 证明以下行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1^{b_1} & a_1^{b_2} & \cdots & a_1^{b_p} \\ a_2^{b_1} & a_2^{b_2} & \cdots & a_2^{b_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p^{b_1} & a_p^{b_2} & \cdots & a_p^{b_p} \end{vmatrix}$$

其绝对值有上下界如下：

$$\frac{1}{p}\prod_{i=1}^{p}|a_i|^{b_i}<|D|<2\prod_{i=1}^{p}|a_i|^{b_i}.$$