

中国科学院数学与系统科学研究院

2005 年硕士研究生招生初试试题

考试科目: 数学分析 (代码 310) (3 小时完成, 满分 150 分)

1. (15 分) 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x^4} - \sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}.$$

2. (15 分) 设 $a, b > 0, a \neq b$, 证明

$$\frac{2}{a+b} < \frac{\ln a - \ln b}{a-b} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

3. (10 分) 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

4. (10 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 的收敛性.

5. (15 分) 设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域中连续, $F(x) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy$,

求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{t}$.

6. (15 分) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b \leq a)$ 内的那部分面积.

7. (15 分) 设 $f(x, y) = \varphi(|xy|)$, 其中 $\varphi(0) = 0$, 且 $\varphi(u)$ 在 $u = 0$ 的某个邻域中满足 $|\varphi(u)| \leq |u|^\alpha (\alpha > \frac{1}{2})$. 证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 但函数 $g(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在 $(0, 0)$ 处不可微.

8. (15 分) 设 $\varphi(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上有连续导数, 并且 $\varphi(0) = 1$. 令

$$f(r) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} \varphi(x^2+y^2+z^2) dx dy dz \quad (r \geq 0).$$

证明 $f(r)$ 在 $r = 0$ 处三次可微, 并求 $f'''(0)$ (右导数).

9. (20 分) 设 $f(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 上可微, 且满足 $f'(a)f'(b) < 0$ (此处 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 分别表示 f 在 a 和 b 处的右导数和左导数), 则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$.

10. (20 分) 设 $e^{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 求 a_0, a_1, a_2, a_3 , 并证明

$$a_n \geq e(\gamma \ln n)^{-n} \quad (n \geq 2),$$

其中 γ 是某个大于 e 的常数.