2005年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　信号与系统

说明：1. 本试卷共七大题，总共 150 分。

2. 请看清每题的要求，特别注意黑体字。若结果是实函数，必须写出实函数表达式；若要求概画出图形的，必须作必要的标注。

一、已知当输入信号为 $x(t)$ 时，某连续时间因 LTI 系统的输出信号为 $y(t)$，$x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形如图 1.1 所示。试用**时域方法**求：（共 26 分）

1. 该系统的单位**阶跃**响应 $s(t)$，并概画出 $s(t)$ 的波形；（12 分）
2. 在系统输入为图 1.2 所示的 $x_1(t)$ 时的输出信号 $y_1(t)$，并概画出 $y_1(t)$ 的波形。（14 分）

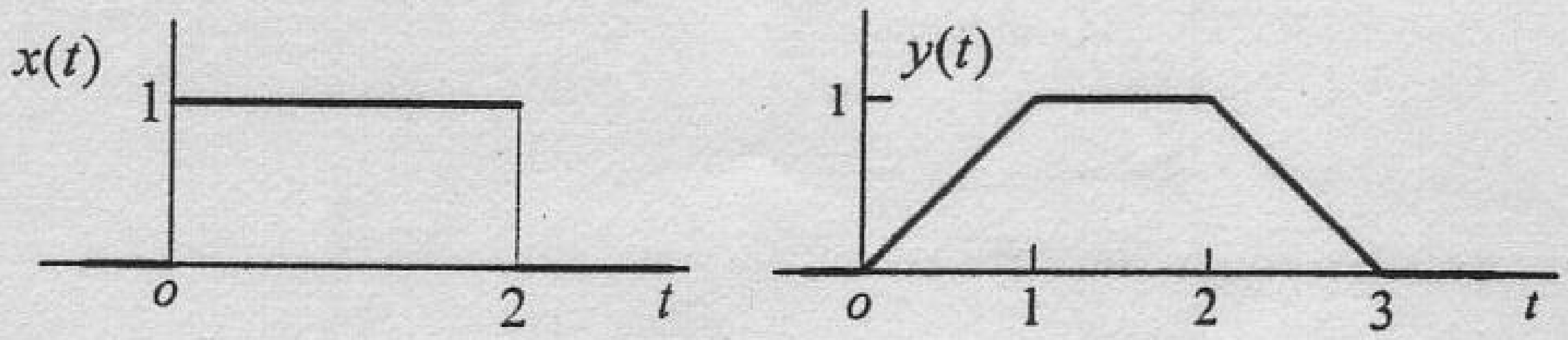

图 1.1

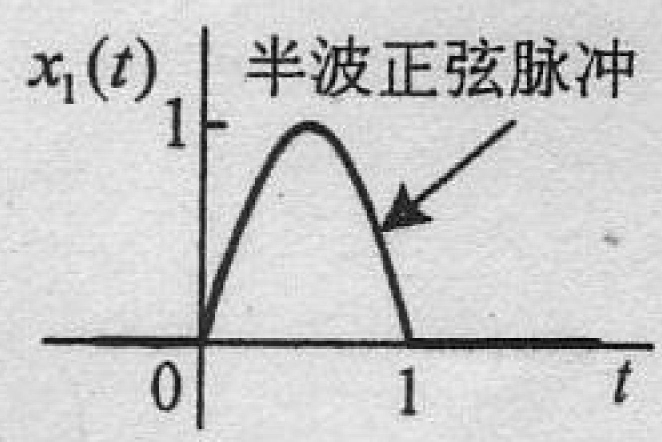

图 1.2

二、由差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]=\sum_{k=0}^{4}\left(x[n-k]-2x[n-k-1]\right)$ 和非零起始条件 $y[-1]=1$ 表示的离散时间因果系统，当系统输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，**试用递推算法求**：（共 16 分）

1. 该系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$（至少计算出前 6 个序列值）；（10 分）
2. 该系统的零输入响应 $y_{zi}[n]$（至少计算出前 4 个序列值）；（6 分）

三、已知连续时间信号 $x(t)=\dfrac{\sin[2\pi(10^3t-1)]}{2\pi(t-10^{-3})}\cos(2\pi\times10^6t)$ 毫安，若它是能量信号，试求其能谱密度函数和它在单位电阻上消耗的能量；若它是功率信号，则求其功率谱密度函数和它在单位电阻上消耗的平均功率。（共 14 分）

四、已知 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 4 的周期序列，且已知 8 点序列 $x[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le 7$，的 8 点 DFT 系数为：$X(0)=X(2)=X(4)=X(6)=1$，$X(k)=0$，其它 k。试求：（共 24 分）

1. 周期序列 $\tilde{x}[n]$，并概画出它的序列图形；（12 分）
2. 该周期序列 $\tilde{x}[n]$ 通过单位冲激响应为 $h[n]=(-1)^2\dfrac{\sin^2(\pi n/2)}{\pi^2n^2}$ 的数字滤波器后的输出 $y[n]$，并概画出它的序列图形。（12 分）

五、已知 $x(t)$ 是最高频率为 4 kHz 的连续时间带限信号，（共 24 分）

1. 若对 $x(t)$ 进行平顶抽样获得的已抽样信号 $x_p(t)$ 如图 5 所示，试求由 $x_p(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的重构滤波器的频率响应 $H_L(\omega)$，并概画出其幅频响应和相频响应；（16 分）

$$P(\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right) \quad 和 \quad H_0(\omega)=\frac{T}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}$$ （2 分），其中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}$ 是移线性相移因子。$H_0(\omega)$ 的实部如图 5.1 所示。（1 分）把他们代入(5-3)式，得到

$$X_{\mathrm{P}}(\omega)=\frac{1}{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)\right\}\frac{T}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}} \quad （3\ 分） \tag{5-4}$$

其中，$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}$ 是移线性相移因子。$X_{\mathrm{P}}(\omega)$ 的实部如图 5.2 所示。（1 分）

如果要从 $x_{\mathrm{P}}(t)$ 恢复出 $x(t)$，只要把 $X_{\mathrm{P}}(\omega)$ 变成 $X(\omega)$ 即可。由图 5.1 和图 5.2，以及(5-4)式可知，为了 $X(\omega)=X_{\mathrm{P}}(\omega)H_{\mathrm{L}}(\omega)$，重构滤波器 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 应为

$$H_{\mathrm{L}}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{2}{\mathrm{Sa}(\omega T/4)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}, & |\omega|<\dfrac{\pi}{T} \\ 0, & |\omega|<\pi/\mathrm{T}\end{cases}，其中，\frac{\pi}{T}=8\pi\times10^3 \quad （3\ 分） \tag{5-5}$$

所求重构滤波器 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 的幅频特性 $|H_{\mathrm{L}}(\omega)|$ 和相频特性 $\varphi_{\mathrm{L}}(\omega)$ 如图 5.2 所示（1 分）

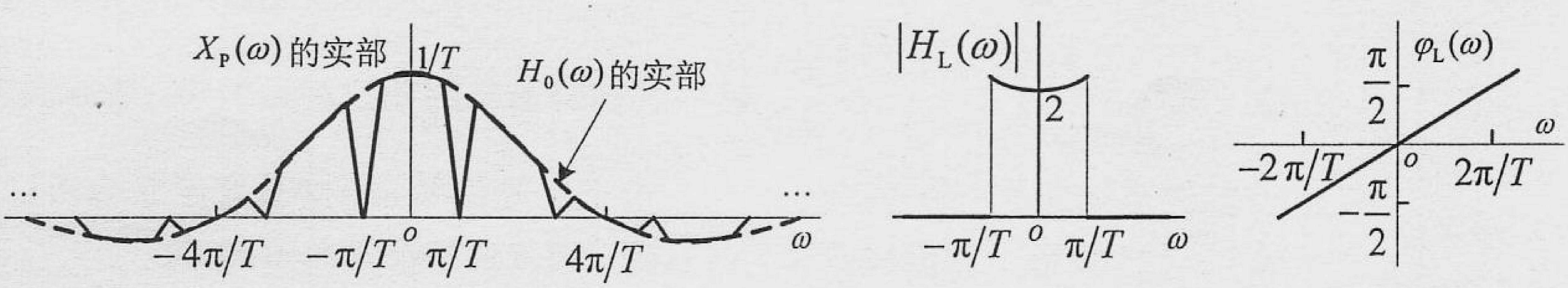

图 5.2　图中 $\omega_{\mathrm{M}}=\pi/\mathrm{T}=8\pi\times10^3$

2. 解：1. 小题求得的所求重构滤波器 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 是不可能实现的，（1 分）理由如下：

1) $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 的过渡带等于 0，其单位冲激响应 $h_{\mathrm{L}}(t)\neq0$，$t<0$，即它是一个连续时间非因果滤波器；（1 分）

2) 它的相频特性 $\varphi_{\mathrm{L}}(\omega)$ 意味着超前 $T/2$，也无法做到。（1 分）

为了从图 5 所示的平顶抽样信号 $x_{\mathrm{P}}(t)$ 中实现**无失真**恢复原信号，针对上述两点理由，需要做两个修改：

1) 采用过抽样，给重构滤波器留出保护带，比如抽样率增加到 10 KHz；（2 分）

2) 重构滤波器 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 修改为

$$H_{\mathrm{L}}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{2}{\mathrm{Sa}(\omega T/4)}, & |\omega|<8\pi\times10^3 \\ 0, & |\omega|>\pi\times10^4\end{cases}, \tag{5-6}$$

在 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 的过渡带（$8\pi\times10^3<|\omega|<\pi\times10^4$）范围内，$H_{\mathrm{L}}(\omega)=$ 任意，只要可实现就行。这样，$x_{\mathrm{P}}(t)$ 通过(5-6)式的重构滤波器 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 的输出为 $x(t-T/2)$。（3 分）

六、如图6的信号流图所示的数字滤波器，试求：（共**22**分）

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，并画出它用一个一阶全通滤波器和一个4阶FIR滤波器的**级联**实现的方框图或信号流图；（**12**分）
2. 概画出该数字滤波器的幅频响应 $\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$（或 $\left|H(e^{j\Omega})\right|$）。（**10**分）

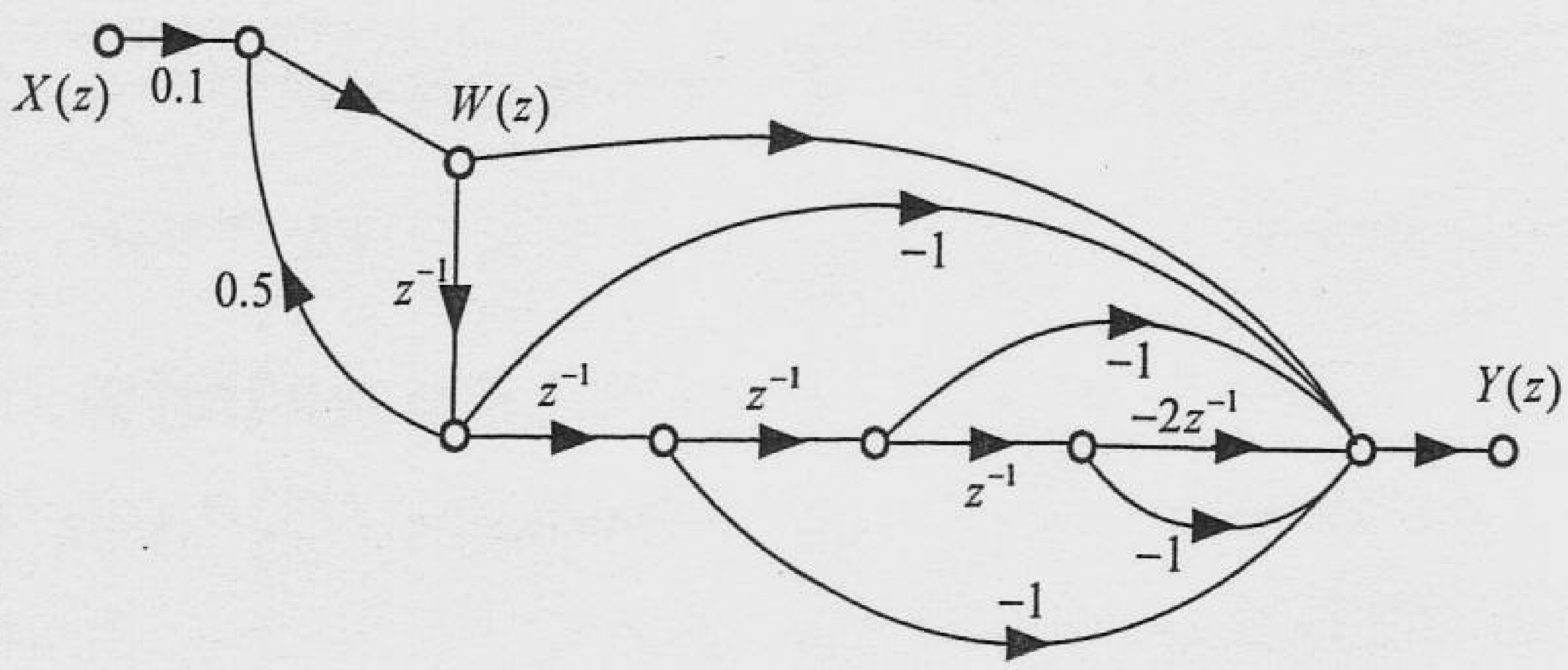

图 6

1. **解**：图6的信号流图表示的数字滤波器输出和输入像函数之间的关系可以写成为

$$Y(z)=W(z)-W(z)z^{-1}-W(z)z^{-2}-W(z)z^{-3}-W(z)z^{-4}-2W(z)z^{-5}\text{（1 分）}$$

$$W(z)=0.5W(z)z^{-1}+0.1X(z)\text{，（1 分）}$$

联立上述两式得到

$$Y(z)=\frac{X(z)}{1-0.5z^{-1}}[1-z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}-z^{-4}-2z^{-5}]\text{（1 分）}$$

该数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}-z^{-4}-2z^{-5}}{10(1-0.5z^{-1})}=\frac{0.1(1-2z^{-1})}{1-0.5z^{-1}}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})\text{（3 分）}\tag{6-1}$$

其中，一阶系统函数 $\dfrac{1-2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$ 是一阶全通函数，$(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})$ 是4阶FIR滤波器的系统函数，两者相乘即为两个滤波器级联，其级联实现方框图见图6.1。（6分）

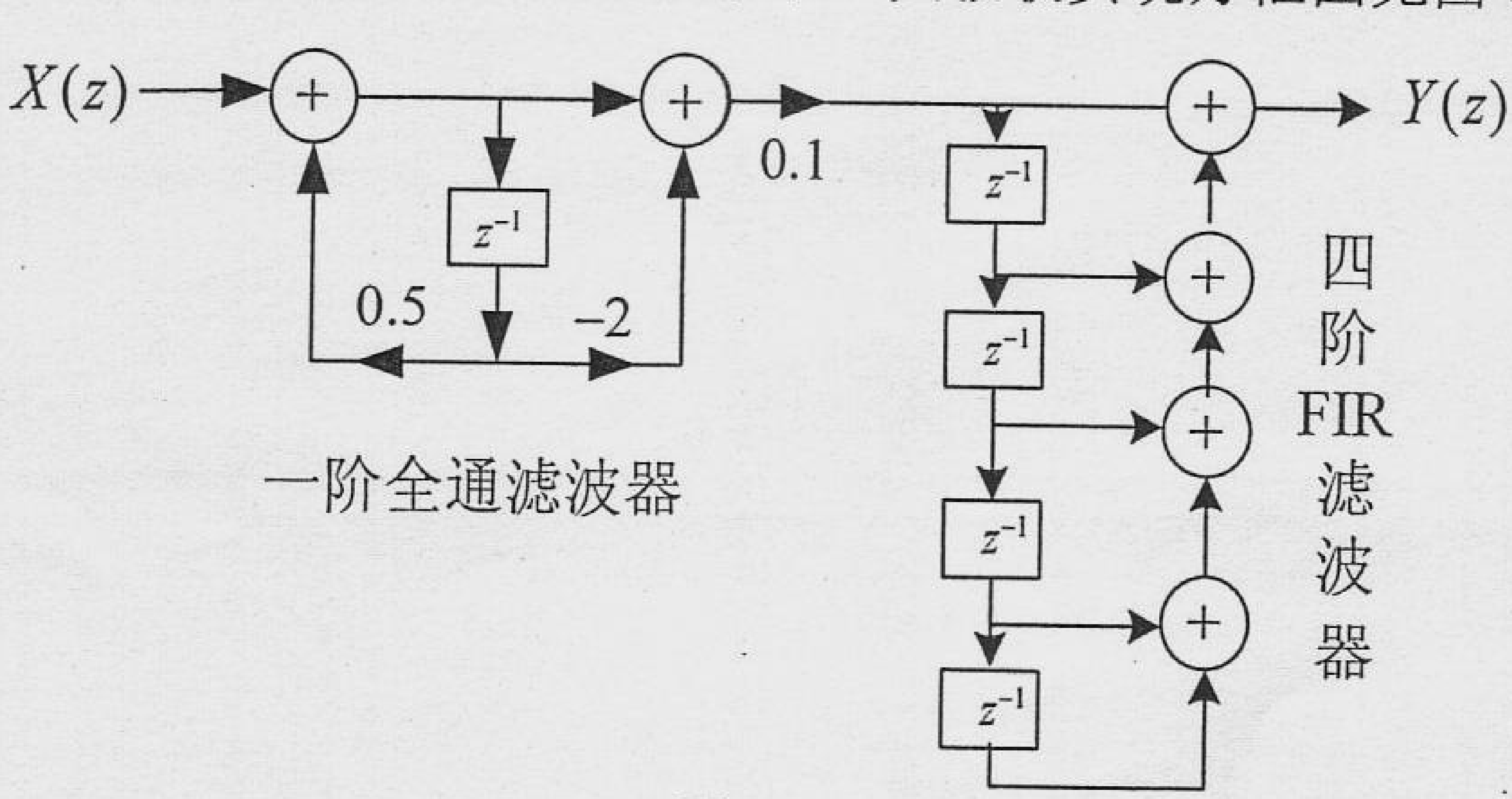

图 6.1

或者，图 6 是直接 II 型实现结构的信号流图，可以直接写出该数字滤波器的差分方程

$$y[n]-0.5y[n-1]=x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]-x[n-4]-2x[n-5]$$（3 分）

由上述方程写出该数字滤波器的的系统函数 $H(z)$。（见前面(6.1)式）（3 分）

2. 解：由 1.小题求得的(6.1)式可写成

$H(z)=H_0H_1(z)H_2(z)$ 和 数字滤波器频率响应 $\tilde{H}(\Omega)=H_0\tilde{H}_1(\Omega)\tilde{H}_2(\Omega)$

其中，$H_0=0.1$；$H_1(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$，它是一阶全通系统，极点 $p=0.5$，零点 $z=2$；

和 $H_2(z)=(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})$，它是 FIR 滤波器。

该数字滤波器幅频响应为：$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|=\left|H_0\right|\left|\tilde{H}_1(\Omega)\right|\left|\tilde{H}_2(\Omega)\right|$（2 分）

其中，$\left|H_0\right|=0.1$；$\left|\tilde{H}_1(\Omega)\right|=2$；（2 分）

FIR 滤波器 $H_2(z)$ 的单位冲激响应 $h_2[n]$ 为

$$h_2[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]=u[n]-u[n-5]$$（1 分）

$h_2[n]$ 序列图形见图 6. 1，它的幅频响应为 $\left|\tilde{H}_2(\Omega)\right|=\left|\dfrac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right|$（见图 6. 2）（3 分）

因此，该数字滤波器幅频响应为：$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|=0.2\left|\dfrac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right|$（1 分）

$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$ 的图形如图 6. 3 所示（1 分）

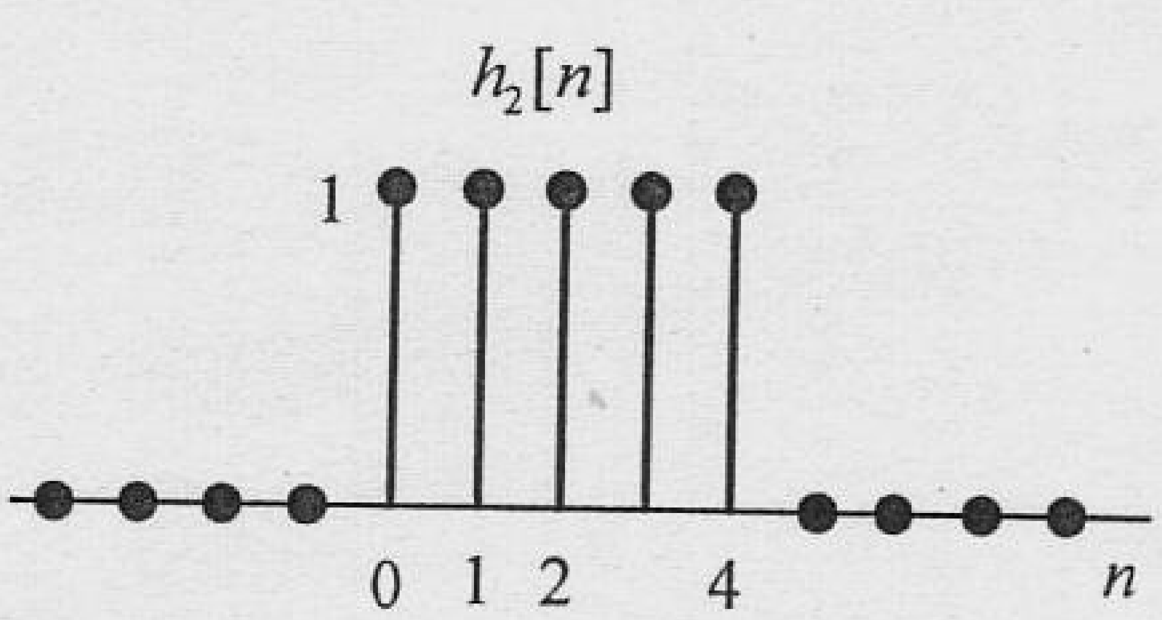

图 6. 1

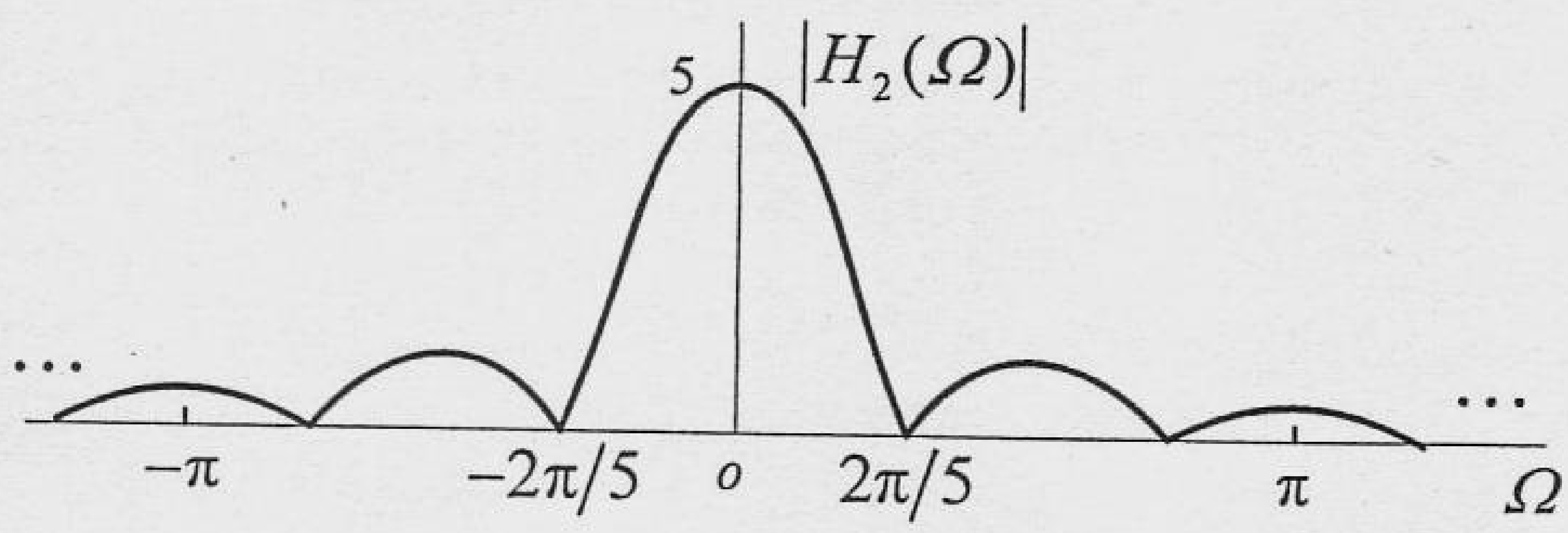

图 6. 2

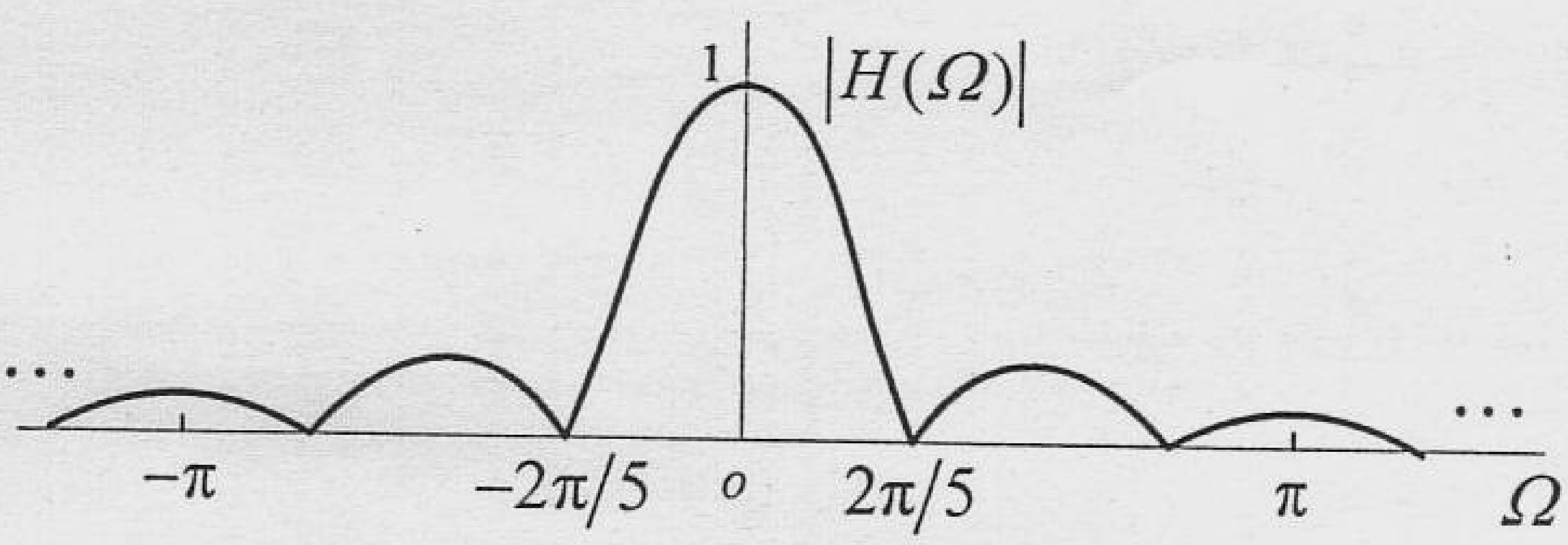

图 6. 3

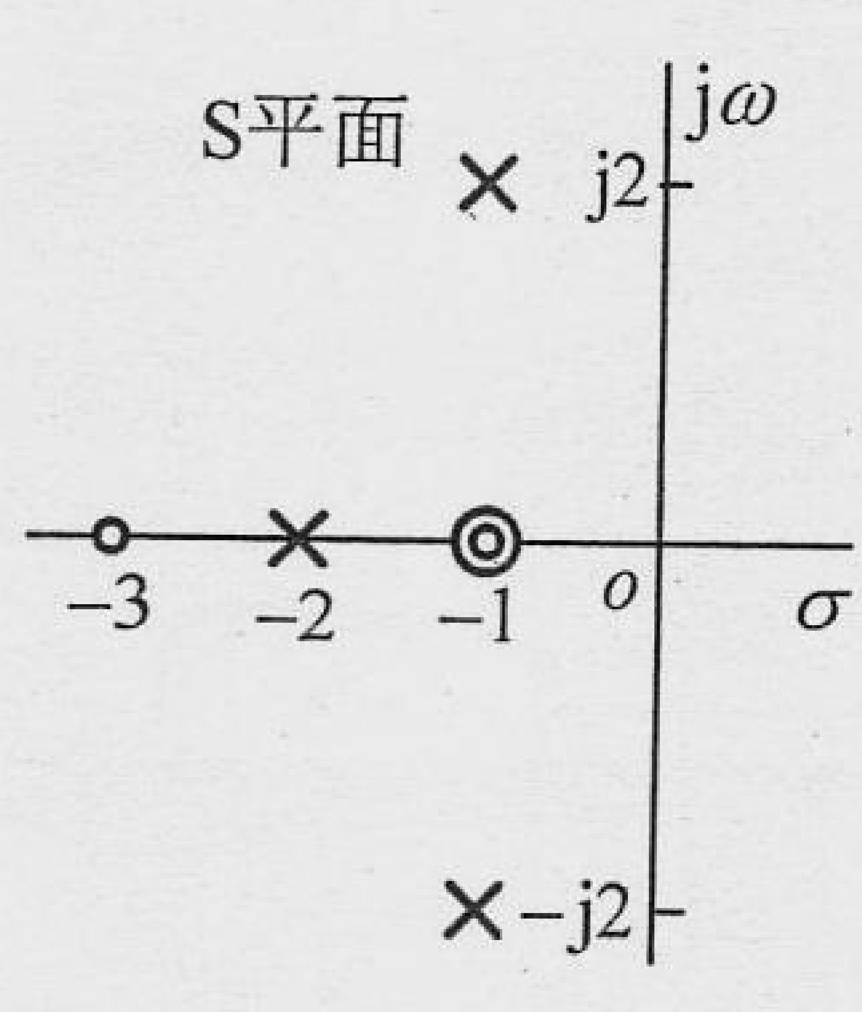

图 7

七、某连续时间实的因果 LTI 系统的零、极点见图 7，并已知 $\int_{0_-}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = 1.5$，其中 $h(t)$ 为该系统的单位冲激响应。试求：（共 **24** 分）

1. 它是什么类型的系统（全通或最小相移系统），并求 $h(t)$（应为实函数）；（**14** 分）
2. 写出它的线性实系数微分方程表示；（**2** 分）
3. 它的逆系统的单位冲激响应 $h_1(t)$，该逆系统可因果稳定实现吗？（**8** 分）

1. **解**：该因果系统为最小相位滤波器，由图 7 的系统零、极点分布，可写出其系统函数为

$$H(s) = H_0 \frac{(s+1)^2(s+3)}{[(s+1)^2+4](s+2)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \text{（4 分）}$$

并由 $\int_{0_-}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = 1.5$ 求出其中的实常数 H_0，即 $H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = 1.5$。代入上式求得　$H_0 = 5$（2 分）。最终得到该系统的系统函数及其收敛域如下

$$H(s) = \frac{5(s^3+5s^2+7s+3)}{s^3+4s^2+9s+10}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \tag{7-1}$$

将上述有理系统函数用长除法和部分分式展开为

$$H(s) = 5 + \frac{5s^2-10s-35}{[(s+1)^2+4](s+2)} = 5 + \frac{1}{s+2} + \frac{4s}{(s+1)^2+2^2} - 10\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \text{（4 分）}$$

由于是因果 LTI 系统，其 $h(t)=0$，$t<0$，因此，对上述部分分式反拉氏变换求得

$$h(t) = 5\delta(t) + \mathrm{e}^{-2t}u(t) + 4\mathrm{e}^{-t}(\cos 2t)u(t) - 10\mathrm{e}^{-t}(\sin 2t)u(t) \text{（4 分）}$$

2. **解**：按照(7-1)式的有理系统函数，可以直接写出该因果 LTI 系统的微分方程如下

$$\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3} + 4\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 9\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 10y(t) = 5\frac{\mathrm{d}^3x(t)}{\mathrm{d}t^3} + 15\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 35\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 25x(t) \text{（2 分）}$$

3. **解**：该系统的逆系统之系统函数 $H_\mathrm{I}(s)$ 及其收敛域为

$$H_I(s) = 0.2\frac{s^3+4s^2+9s+10}{(s+1)^2(s+3)} = 0.2\left[1 + \frac{-s^2+2s+7}{(s+1)^2(s+3)}\right], \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \text{（1 分）} \tag{7-2}$$

并进一步可以部分分式展开为

$$H_I(s) = 0.2 + \frac{0.4}{(s+1)^2} + \frac{0.2}{s+1} - \frac{0.4}{s+3}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \text{（3 分）}$$

这是一个因果稳定的系统函数，对上述部分分式进行反拉氏变换求得

$$h_I(t) = 0.2\delta(t) + 0.2\mathrm{e}^{-t}u(t) + 0.4t\mathrm{e}^{-t}u(t) - 0.4\mathrm{e}^{-3t}u(t) \text{（3 分）}$$

因此，该逆系统是既稳定，又可以因果实现。（1 分）

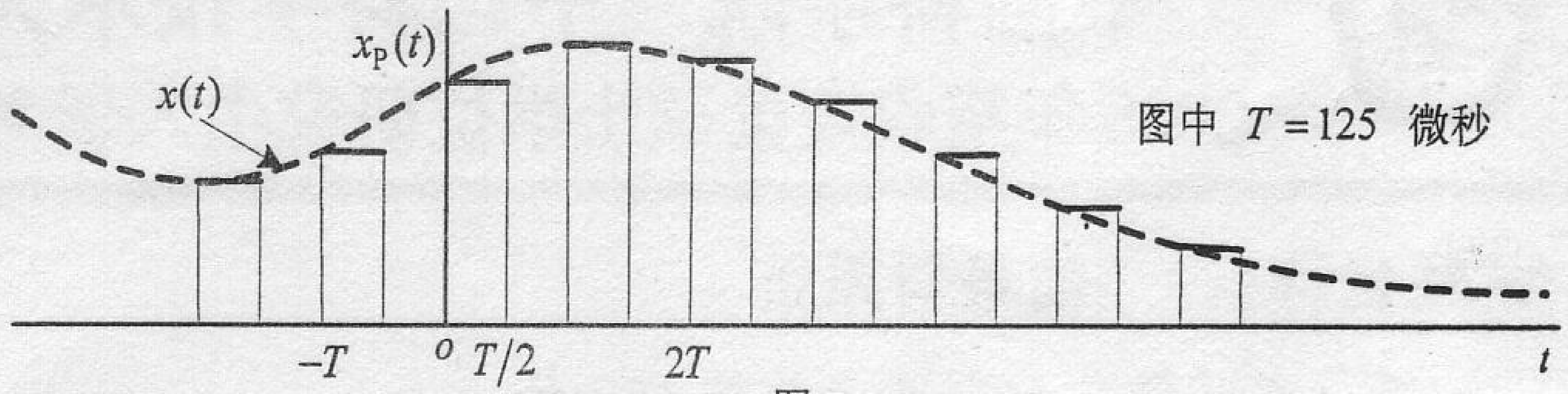

图 5

2. 你在 1 小题求得的重构滤波器为什么不可实现？为实现无失真恢复原信号，需对抽样频率和重构滤波器频率响应 $H_L(\omega)$ 作怎样的修改？（8 分）

六、如图 6 的信号流图所示的数字滤波器，试求：（共 22 分）

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，并画出它用一个一阶全通滤波器和一个 4 阶 FIR 滤波器的级联实现的方框图或信号流图；（12 分）
2. 概画出该数字滤波器的幅频响应 $|\tilde{H}(\Omega)|$ （或 $|H(e^{j\Omega})|$ ）。（10 分）

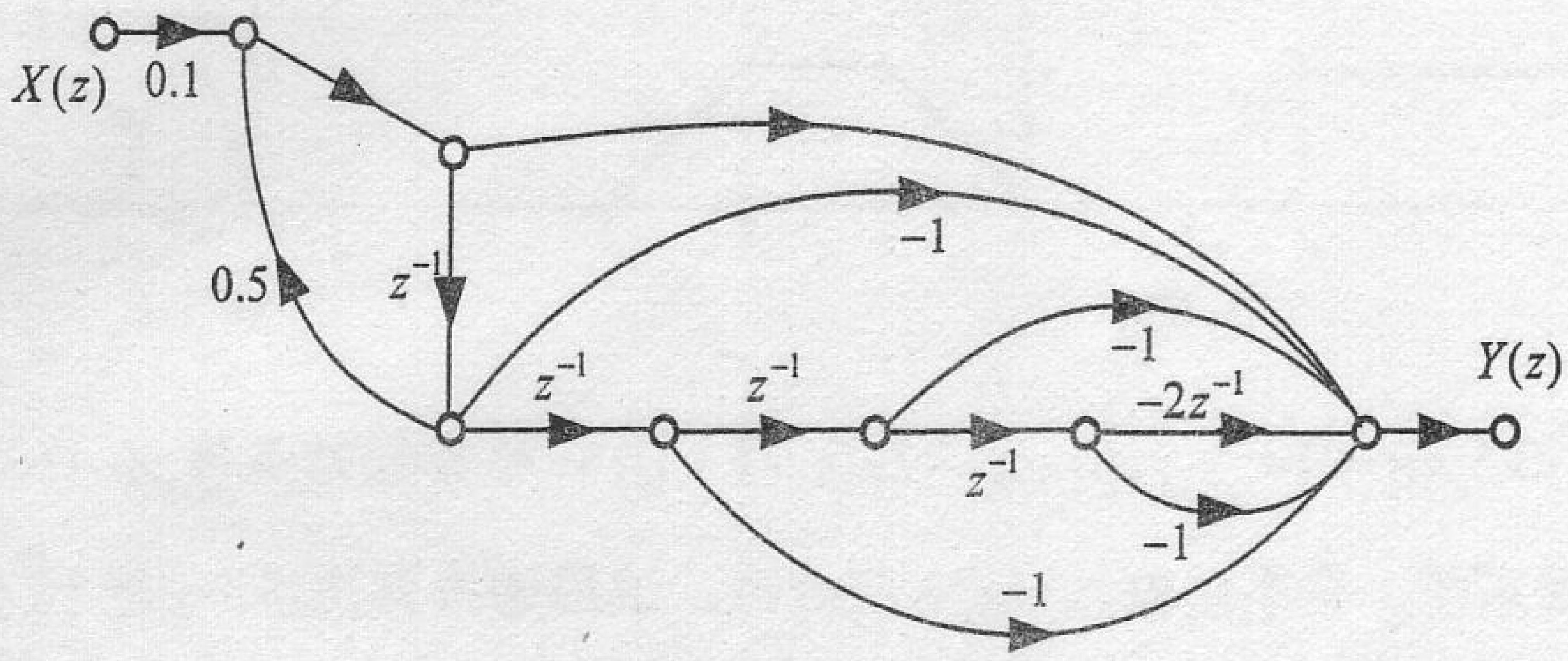

图 6

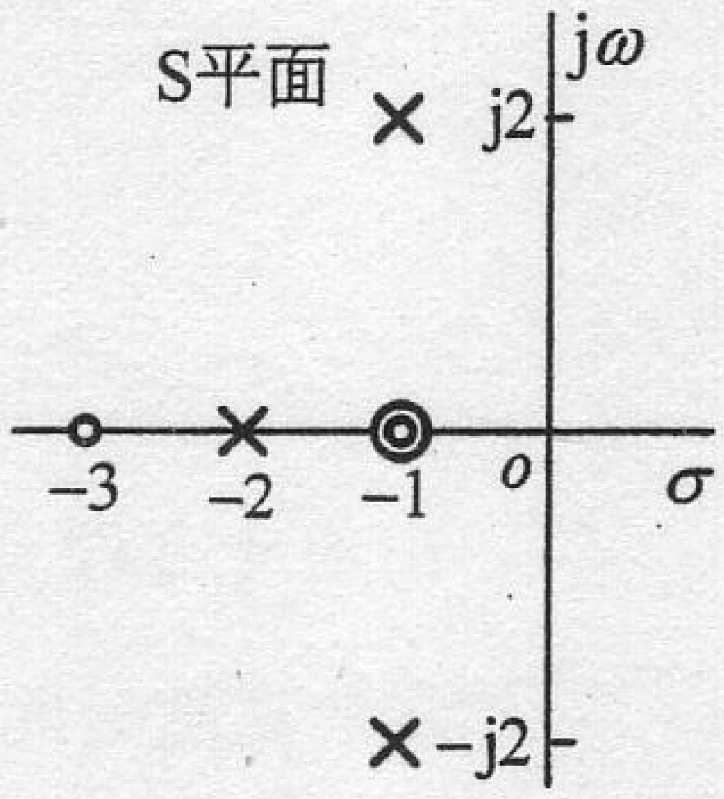

图 7

七、某连续时间实的因果 LTI 系统的零、极点见图 7，并已知 $\int_{0_-}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = 1.5$，其中 $h(t)$ 为该系统的单位冲激响应。试求：（共 24 分）

1. 它是什么类型的系统（全通或最小相移系统），并求 $h(t)$（应为实函数）；（14 分）
2. 写出它的线性实系数微分方程表示；（2 分）
3. 它的逆系统的单位冲激响应 $h_I(t)$，该逆系统是可以实现（即既因果又稳定）的吗？（8 分）

试题名称： 信号与系统

一、已知当输入信号为$x(t)$时，某连续时间因 LTI 系统的输出信号为$y(t)$，$x(t)$和$y(t)$的波形如图 1.1 所示。试用时域方法求：（共 **26** 分）

1. 该系统的单位**阶跃**响应$s(t)$，并概画出$s(t)$的波形；（**12** 分）
2. 系统输入为图 1.2 所示的$x_1(t)$时的输出信号$y_1(t)$，并概画出它的波形。（**14** 分）

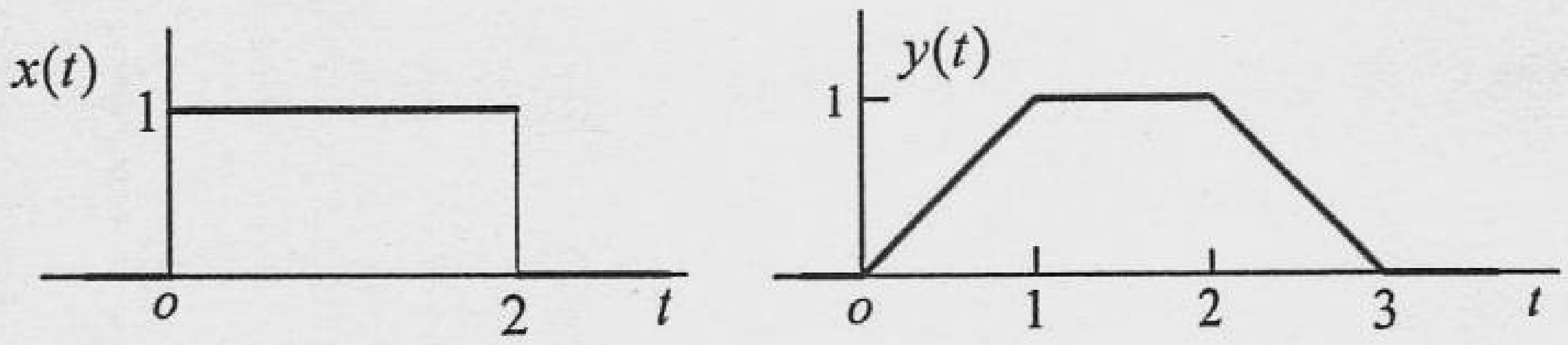

图 1.1

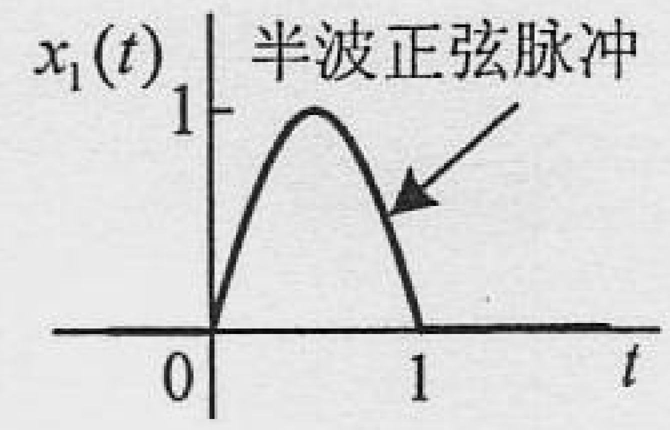

图 1.2

1．解： 可以用多种不同时域方法求该系统的单位阶跃响应$s(t)$。

方法一： 先求单位阶跃响应$h(t)$，再用$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=h(t)*u(t)$求出$s(t)$。

由图 1.1 看出：$x(t)=u(t)-u(t-2)$（1 分）

和 $y(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3)$

$=tu(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)-\delta(t-2)+\delta(t-3)]$

$=u(t)*u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]*[\delta(t)-\delta(t-2)]$

$=[u(t)-u(t-2)]*[u(t)-u(t-1)]=x(t)*[u(t)-u(t-1)]$（6 分）

由于该系统是 LTI 系统，$y(t)=x(t)*h(t)$，对比上式可得

$h(t)=u(t)-u(t-1)$（1 分） (2-1)

$h(t)$的波形如图 1.3 右图所示。

或者，直接由图 1.1 看出$y(t)=x(t)*[u(t)-u(t-1)]$，即如图 1.3 所示那样

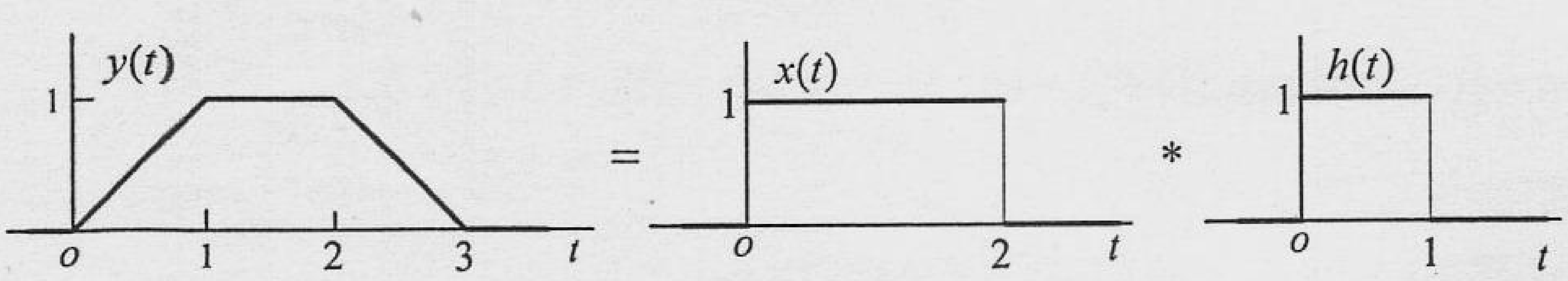

图 1.3（7 分）

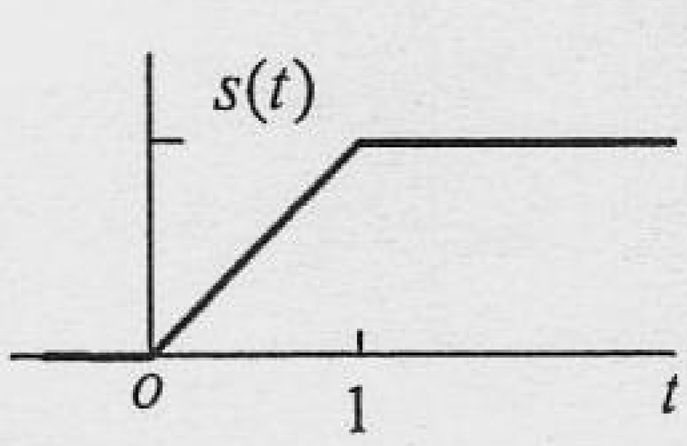

图 1.4

由此得到：$h(t)=u(t)-u(t-1)$（1 分）

还可以按如下方法求$h(t)$：按照卷积积分的微分性质，$y'(t)=x'(t)*h(t)$

显然，$x'(t)=\delta(t)-\delta(t-2)$（2 分），并由$y(t)$波形微分得到$y'(t)$波形如图 1.5 所示，

即 $y'(t)=u(t)-u(t-1)-u(t-2)+u(t-3)$（5 分）

因此得到：$h(t)=u(t)-u(t-1)$（1 分）

然后，$s(t)=h(t)*u(t)=[u(t)-u(t-1)]*u(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)$（2 分） (2-2)

$s(t)$的波形如图 1.4 所示。（2 分）

方法二： 直接求出单位阶跃响应$s(t)$。

LTI 系统的 $s(t)$ 是系统输入为 $u(t)$ 时的输出，由图 1.1 中的 $x(t)$ 的波形可知，

$$u(t)=x(t)+x(t-2)+x(t-4)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x(t-2n)$$；（4 分）

根据 LTI 系统满足线性性质，系统对 $u(t)$ 的响应 $s(t)$ 为：

$$s(t)=y(t)+y(t-2)+y(t-4)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}y(t-2n)=tu(t)-(t-1)u(t-1)$$（4 分）

按上式波形叠加图见图 1.6（2 分），由此得到 $s(t)$ 的波形图见上面图 1.4。（2 分）

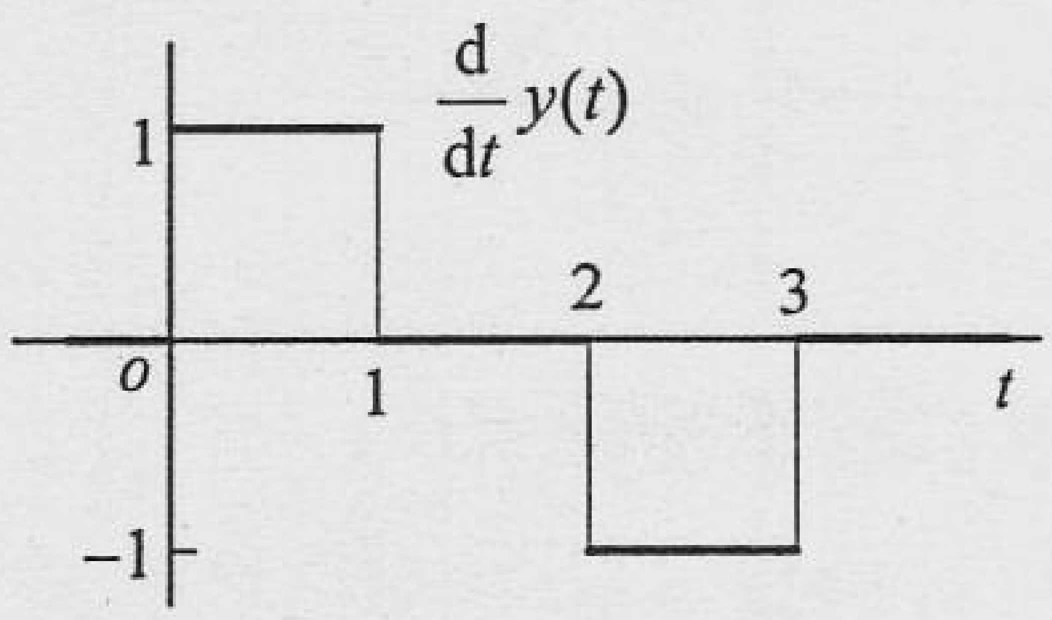

图 1.5

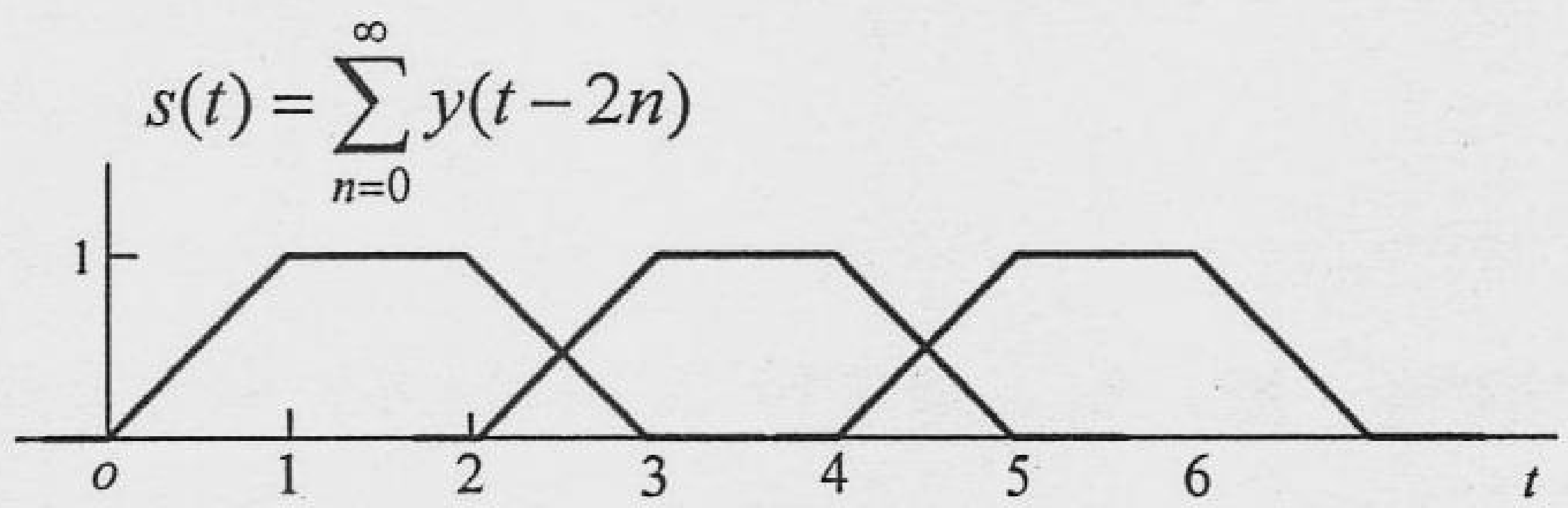

图 1.6

2. 解：由 1. 小题已求得：$h(t)=u(t)-u(t-1)$，则有，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$（1 分）

该 LTI 系统当输入 $x_1(t)$ 时的输出信号 $y_1(t)$ 为：

$$y_1(t)=h(t)*x_1(t)=\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}*\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\left[\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right]*[\delta(t)-\delta(t-1)]$$

$$=y_0(t)-y_0(t-1)\qquad \text{其中，} y_0(t)=\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau \text{（2 分）} \tag{2-3}$$

由图 1.2 可得到：$x_1(t)=(\sin\pi t)[u(t)-u(t-1)]=\sin\pi t u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)$

$$y_0(t)=\int_{-\infty}^{t}\sin\pi\tau u(\tau)\mathrm{d}\tau-\int_{-\infty}^{t}\sin\pi\tau u(\tau-1)\mathrm{d}\tau=\left[\int_0^t\sin\pi\tau\mathrm{d}\tau\right]u(t)-\left[\int_1^t\sin\pi\tau\mathrm{d}\tau\right]u(t-1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)+[1-\cos\pi(t-1)]u(t-1)\}$$（5 分）

$y_0(t)$ 的波形如图 1.7 所示。（2 分）

将 $y_0(t)$ 代入(2-3)式，得到所求系统输出为：

$$y_1(t)=\frac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)-[1-\cos\pi(t-2)]u(t-2)\} \text{（2 分）} \tag{2-4}$$

$y_1(t)$ 的波形如图 1.8 所示。（2 分）

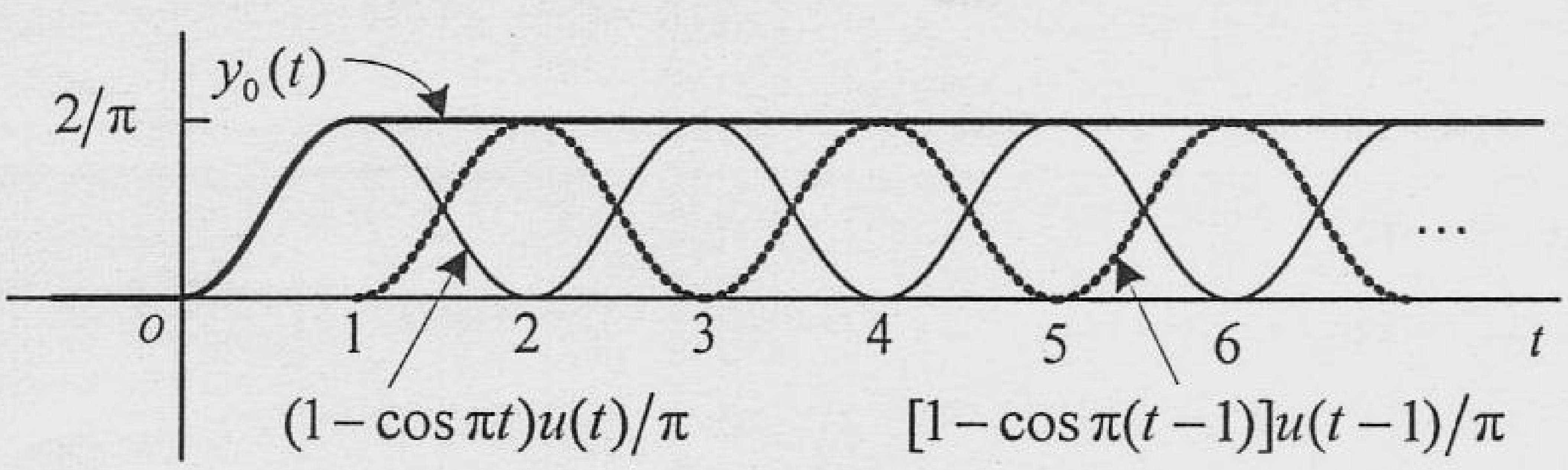

图 1.7

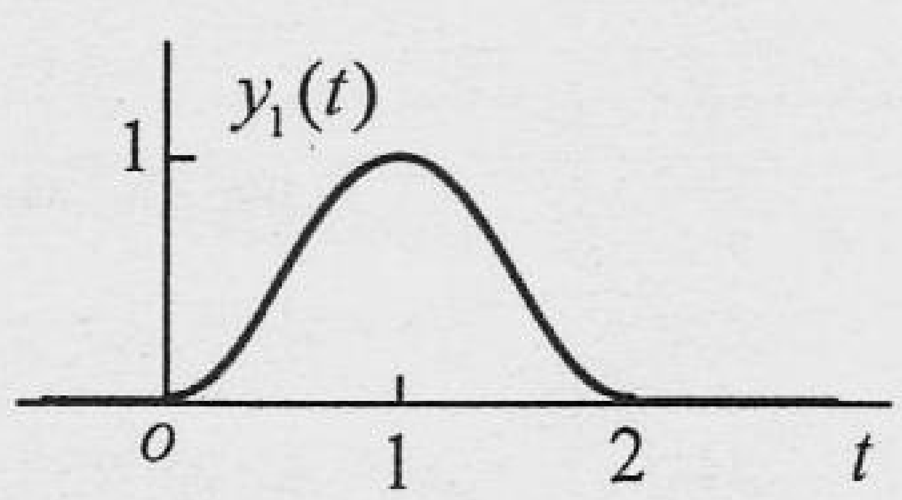

图 1.8

或者，还可以直接用如下的方法求 $y_1(t)$：

$$y_1(t)=x_1(t)*h(t)=x_1(t)*[u(t)-u(t-1)]=y_0(t)-y_0(t-1)\quad \text{（4 分）} \tag{2-5}$$

其中，$y_0(t)=x_1(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau$，它可以对图 1.2 中的 $x_1(t)$ 波形直接滑动积分得到（6 分），其波形如图 1.7 中的 $y_0(t)$ 所示（2 分），代入(2-5)式，得到图 1.8 所示的 $y_1(t)$。（2 分）

本题如果用拉氏变换方法求，例如按如下方法正确求出 $h(t)$、$s(t)$ 和 $y_1(t)$，按照题意（题目要求用时域方法求），可以考虑给一半分：

1. $x(t)=u(t)-u(t-2)\ \xleftrightarrow{\ \mathrm{L}\ }\ \left\{\dfrac{1-e^{-2s}}{s},\ R_x=\text{整个 S 平面}\right\}$（0.5 分）

$$\begin{aligned}y(t)&=tu(t)-(t-1)u(t-1)\\&\quad-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3)\end{aligned}\ \xleftrightarrow{\ \mathrm{L}\ }\ \frac{1-\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-3s}}{s^2},\ R_y=\text{整个 S 平面}\ \}\ \text{(1 分)}$$

该 LTI 系统是因果的，其系统函数及其收敛域为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-3s}}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s},\quad R_h=\text{整个 S 平面（2 分）}$$

该系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 的拉氏变换为 $S(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s^2}$，$R_S=\{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$（0.5 分）

对上式取反拉氏变换，得到该系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 为

$$s(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)\ \text{（1 分）} \tag{2-6}$$

$s(t)$ 的波形如前面图 1.4 所示。（1 分）

2. 令 $y_1(t)\ \xleftrightarrow{\ \mathrm{L}\ }\ \{Y_1(s),\ R_{y1}\}$，且有

$$x_1(t)=\sin\pi t u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)\ \xleftrightarrow{\ \mathrm{L}\ }\ \left\{\frac{\pi(1+e^{-s})}{s^2+\pi^2},\ R_{x1}=\text{整个 S 平面}\right\}\ \text{（1 分）}$$

$$Y_1(s)=X(s)H(s)=\frac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}(1-\mathrm{e}^{-s})(1+\mathrm{e}^{-s})=\frac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}(1-\mathrm{e}^{-2s})\ \text{（1 分）}$$

上式中的 $\dfrac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}$ 可以部分分式展开为 $\dfrac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}=\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+\pi^2}\right]$，代入上式，

则有
$$Y_1(s)=\frac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}(1-\mathrm{e}^{-2s})=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\pi^2}\right](1-\mathrm{e}^{-2s})\ \text{（2 分）} \tag{2-7}$$

上式反拉氏变换得到

$$\begin{aligned}y_1(t)&=\frac{1}{\pi}[1-\cos\pi t]u(t)*[\delta(t)-\delta(t-2)]\\&=\frac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)-[1-\cos\pi(t-1)]u(t-1)\}\ \text{（2 分）}\end{aligned} \tag{2-8}$$

$y_1(t)$ 的波形见前面图 1.8（1 分）

二、由差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]=\sum_{k=0}^{4}\left(x[n-k]-2x[n-k-1]\right)$ 和非零起始条件 $y[-1]=1$ 表示的离散时间因果系统，当系统输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，试用递推算法求：（共 **16** 分）

1. 该系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$（至少计算出前 **6** 个序列值）；（**10** 分）
2. 该系统的零输入响应 $y_{zi}[n]$（至少计算出前 **4** 个序列值）；（**6** 分）

1．解：零状态响应 $y_{zs}[n]$ 的方程可以化为：

$$y_{zs}[n]-0.5y_{zs}[n-1]=x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]-x[n-4]-2x[n-5];$$

即 $y_{zs}[n]=0.5y_{zs}[n-1]+x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]-x[n-4]-2x[n-5]$；（3 分）

且有 $y_{zi}[n]=0$，$n<0$（1 分）

当输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，递推计算出的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 的前 6 个序列值分别为：

$y_{zs}[0]=1$；（1 分）

$y_{zs}[1]=-1/2$；（1 分）

$y_{zs}[2]=-5/4$；（1 分）

$y_{zs}[3]=-13/8$；（1 分）

$y_{zs}[4]=-29/16$；（1 分）

$y_{zs}[5]=-93/32$。（1 分）

2．解：零输入响应 $y_{zi}[n]$ 的递推方程可以化为：

$y_{zi}[n]=0.5y_{zi}[n-1]$；且有 $y_{zi}[-1]=y[-1]=-1$；（2 分）

递推计算出的零状态响应 $y_{zi}[n]$ 的前 4 个序列值分别为：

$y_{zi}[0]=-1/2$；（1 分）

$y_{zi}[1]=-1/4$；（1 分）

$y_{zi}[2]=-1/8$；（1 分）

$y_{zi}[3]=-1/16$；（1 分）

三、已知连续时间信号 $x(t)=\dfrac{\sin[2\pi(10^3t-1)]}{2\pi(t-10^{-3})}\cos(2\pi\times10^6t)$ 毫安，若它是能量信号，试求其能谱密度函数和它在单位电阻上消耗的能量；若它是功率信号，则求其功率谱密度函数和它在单位电阻上消耗的平均功率。（共 **14** 分）

解：令：　$x_1(t)=\dfrac{\sin[2\pi\times10^3t]}{2\pi t}$　和　$x_2(t)=x_1(t-10^{-3})$；

则有　$x(t)=x_2(t)\times\cos(2\pi\times10^6t)$

由于 $x_2(t)$ 仅仅是对 $x_1(t)$ 的时延；$x(t)$ 是对 $x_2(t)$ 的调制；$x_1(t)$ 是能量信号，整个 $x(t)$ 是能量信号。（2 分）

利用帕什瓦尔定理求连续时间信号 $x(t)$ 在单位电阻上消耗的能量

再令：$x_i(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X_i(\omega)$，$i=1,\ 2$　和　$x(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X(\omega)$

则有　$|X_2(\omega)| = X_1(\omega) = \begin{cases} 0.5, & |\omega| < 2\pi\times10^3 \\ 0, & |\omega| > 2\pi\times10^3 \end{cases}$（2 分）

和　$|X(\omega)| = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * \pi[\delta(\omega+2\pi\times10^6) + \delta(\omega-2\pi\times10^6)]$（4 分）

$x(t)$ 的幅度频谱 $|X(\omega)|$ 如图 3.1 所示。（2 分）

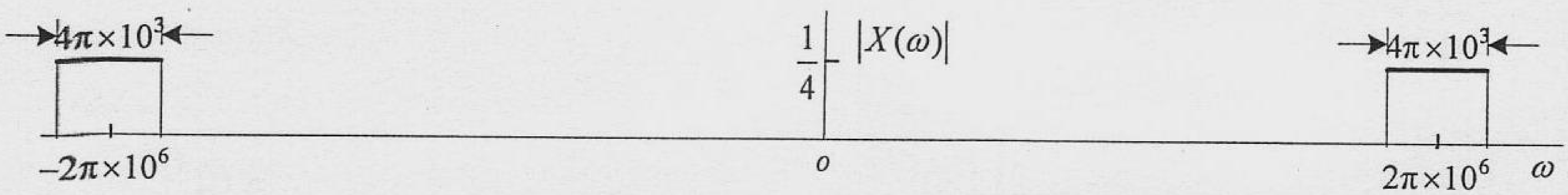

图 3.1

$x(t)$ 在单位电阻上消耗的能量 E_x 为：

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = 10^{-3}(J)\text{（4 分）}$$

四、已知 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 4 的周期序列，且已知 8 点序列 $x[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le7$，的 8 点 DFT 系数为：$X(0)=X(2)=X(4)=X(6)=1$，$X(k)=0$，其它 k。试求：（共 **24** 分）

1. 周期序列 $\tilde{x}[n]$，并概画出它的序列图形；（**12** 分）
2. 该周期序列 $\tilde{x}[n]$ 通过单位冲激响应为 $h[n]=(-1)^2\dfrac{\sin^2(\pi n/2)}{\pi^2 n^2}$ 的数字滤波器后的输出 $y[n]$，并概画出它的序列图形。（**12** 分）

1. **解**：先利用 IDFT 求 $x[n]$，$0\le n\le7$：

即　$x[n] = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X(k)e^{j\frac{2\pi}{8}kn} = \frac{1}{8}\times[1+(-1)^n+(j)^n+(-j)^n] = \frac{1}{8}\left[1+(-1)^n+2\cos\frac{\pi n}{2}\right]$,（8 分）

计算得到：$x[n] = \begin{cases} 0.5 & n=0,\ 4 \\ 0 & n\ne0,\ 4 \end{cases}$，$0\le n\le7$（2 分）

$\tilde{x}[n]$ 是 $x[n]$ 以周期为 8 的周期延拓，它的序列图形如图 4.1 所示。（1 分）

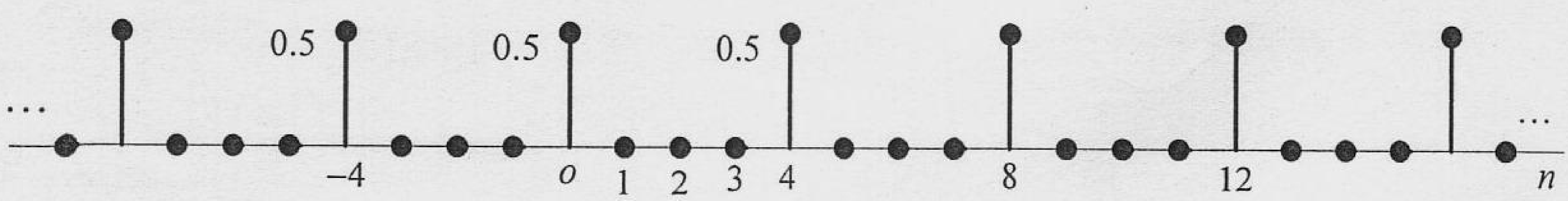

图 4.1

即　$\tilde{x}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-8l] = \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta[n-4l]$（1 分）　(4-1)

或者，由于 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 4 的周期序列，8 点序列 $x[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le7$，包含了 $\tilde{x}[n]$ 的两个完整的周期。根据 DFT 的性质，4 点序列 $x_0[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le3$，的 4 点 DFT

系数为：$X_0(k)=0.5X(2k)=0.5$，$0\le k\le 3$，其中 $X(k)$，$0\le k\le 7$，就是已知的 8 点 DFT 系数（6 分）。再用 4 点 IDFT，求出 4 点序列的序列值：$x_0[0]=0.5$，$x_0[n]=0$，$1\le n\le 3$（4 分）。$\tilde{x}[n]$ 是 $x_0[n]$ 以 4 的周期延拓，其序列图形如图 4.1 所示。（1 分）

2. 解：先求该离散时间 LTI 系统的频率响应 $\tilde{H}(\Omega)$

令：$h_1[n]=\dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\tilde{H}_1(\Omega)$ 和 $h[n]=(-1)^n h_1^2[n]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\tilde{H}(\Omega)$

则有 $\tilde{H}_1(\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|<\pi/2\\ 0, & |\Omega|>\pi/2\end{cases}$，在主值区间$(-\pi,\ \pi)$内（1 分）　(4-2)

$\tilde{H}_1(\Omega)$ 图形如图 4.2 所示。（1 分）

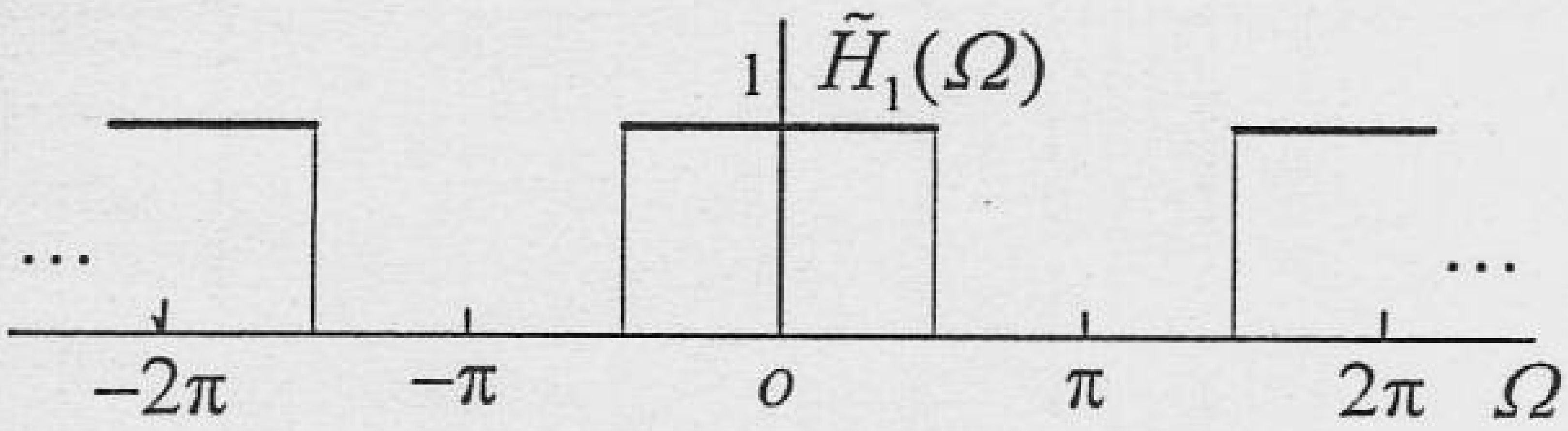

图 4.2

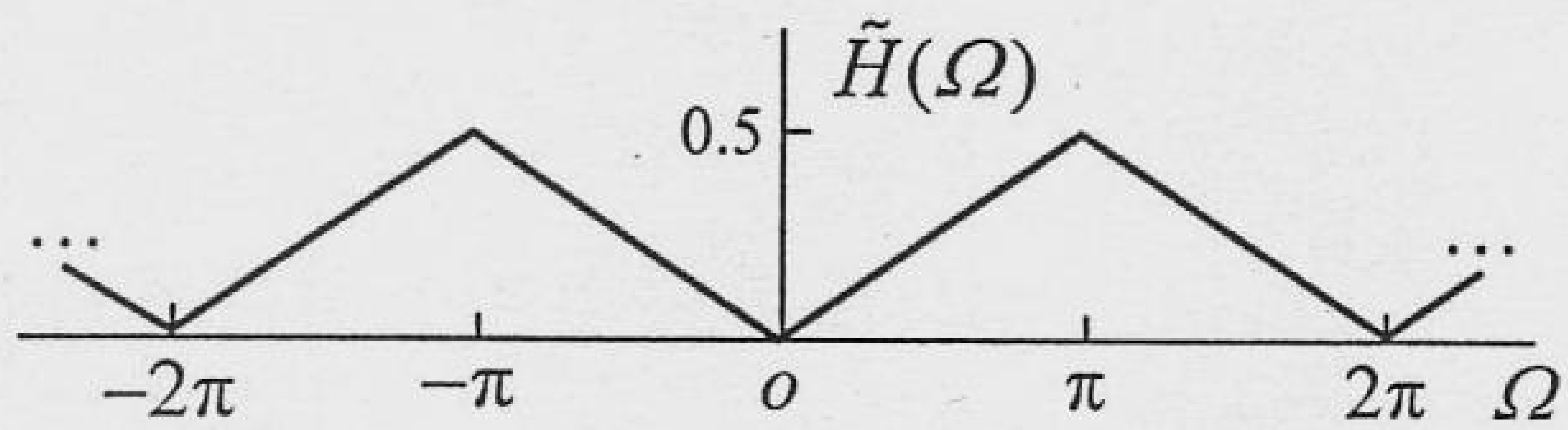

图 4.3

根据频域卷积性质和频移 π 的频移性质，则有

$\tilde{H}(\Omega)=(1/2\pi)\tilde{H}_1(\Omega) * \tilde{H}_1(\Omega) * \delta(\Omega-\pi)$；$\tilde{H}(\Omega)$ 的图形如图 4.3 所示。（3 分）

由(4-1)式或图 4.1，$\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数为：

$\tilde{X}_k=1/8$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3\ \cdots$，谱线间隔为 $\Omega=\pi/2$（2 分）

或者，$\tilde{x}[n]$ 的 DTFT 为：$\tilde{X}(\Omega)=\dfrac{\pi}{4}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\dfrac{\pi}{2})$（2 分）

$\tilde{x}[n]$ 通过 $\tilde{H}(\Omega)$ 后的输出 $y[n]$ 也是周期为 4 的周期序列，它的 DFS 系数为

$\tilde{Y}_k=\begin{cases}1/32, & k=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \cdots\\ 1/16, & k=\pm2,\ \pm6,\ \pm10,\ \cdots\end{cases}$，谱线间隔为 $\Omega=\pi/2$（2 分）

或者，$y[n]$ 的 DTFT 为

$$\tilde{Y}(\Omega)=\tilde{X}(\Omega)\tilde{H}(\Omega)=\frac{\pi}{16}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left[\Omega-(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]+\frac{\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left[\Omega-(2k-1)\pi\right]\ \text{（2 分）}$$

由 DFS 的合成公式或 DTFT 反变换，输出序列 $y[n]$ 为

$$y[n]=\frac{1}{16}e^{j\pi n}+\frac{1}{32}\left[e^{j(\pi/2)n}+e^{-j(\pi/2)n}\right]=\frac{1}{16}\left[(-1)^n+\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]\ \text{（2 分）}\tag{4-3}$$

它的序列图形如图 4.4 所示（1 分）

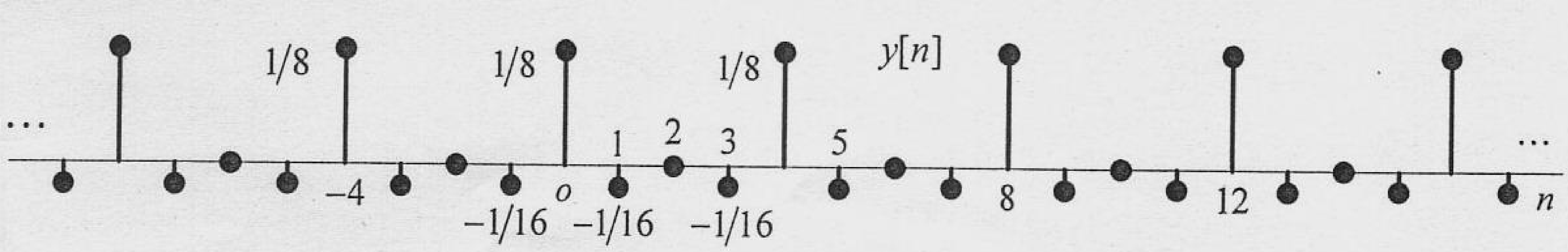

图 4.4

五、已知 $x(t)$ 是最高频率为 4 kHz 的连续时间带限信号，（**共 24 分**）

1. 若对 $x(t)$ 进行**平顶**抽样获得的已抽样信号 $x_{\mathrm{P}}(t)$ 如图 5 所示，试求由 $x_{\mathrm{P}}(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的重构滤波器的频率响应 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$，并概画出其幅频响应和相频响应；（**16 分**）

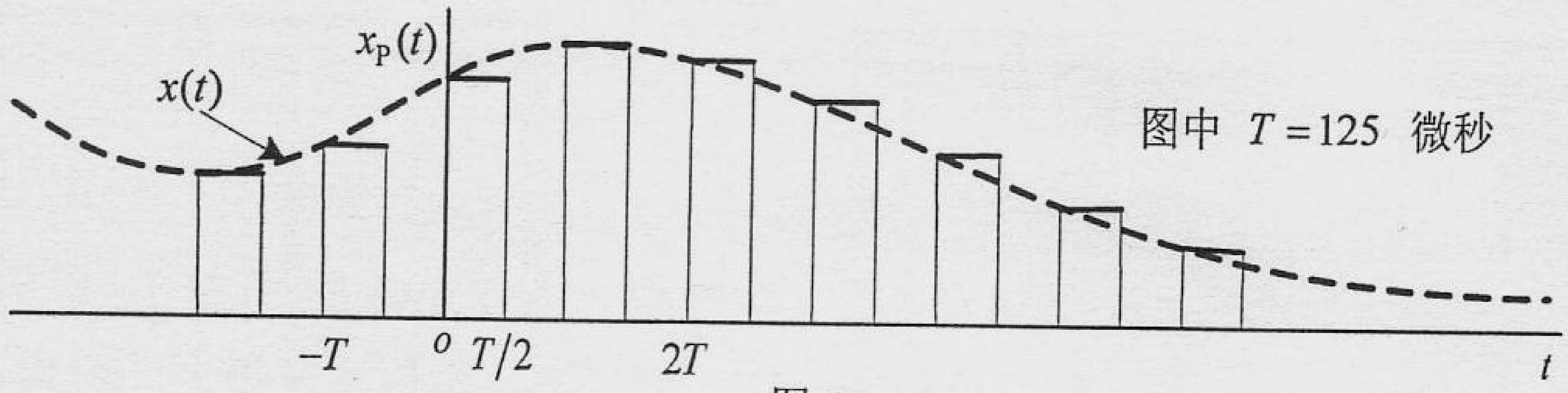

图 **5**

2. 你在 1 小题求得的重构滤波器为什么不可实现？为实现**无失真**恢复原信号，需对抽样频率和重构滤波器频率响应 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 作怎样的修改？（**8 分**）

1. **解**：图 5 的平顶抽样信号 $x_{\mathrm{P}}(t)$ 可表示为

$$x_{\mathrm{P}}(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)\right]*h_0(t) \text{（2 分）} \quad (5\text{-}1)$$

其中，$h_0(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T/2\\ 0, & t<0,\ t>T/2\end{cases}$ 是零阶保持系统的单位冲激响应（0.5 分） (5-2)

$h_0(t)$ 的波形如图 5.1 所示。（0.5 分）由于带限信号 $x(t)$ 的最高频率为 4 kHz，抽样间隔 $T=125$ 微秒，即抽样频率为 8 kHz，故上述抽样是临界抽样。

若令： $x(t)\xleftrightarrow{\text{CFT}}X(\omega)=0$，$|\omega|>8\pi\times10^3$（假设如图 5.1 所示）

和 $x_{\mathrm{P}}(t)\xleftrightarrow{\text{CFT}}X_{\mathrm{P}}(\omega)$

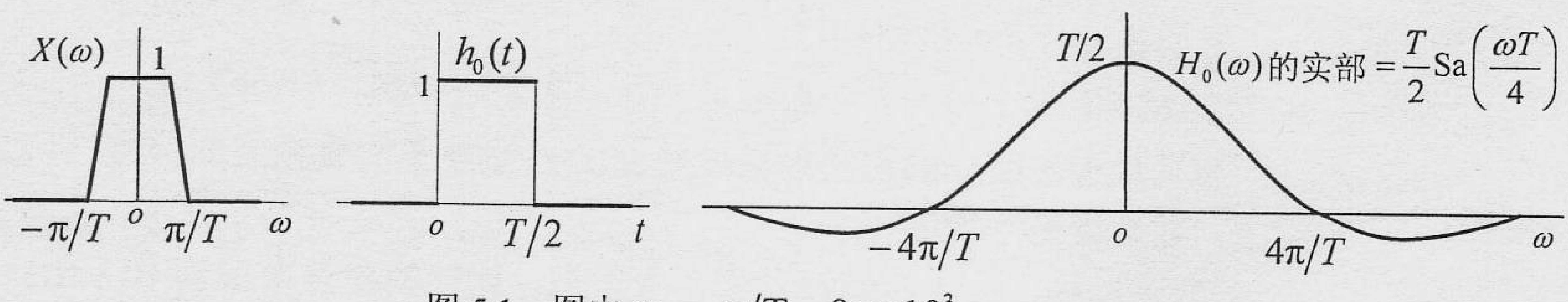

图 5.1 图中 $\omega_{\mathrm{M}}=\pi/\mathrm{T}=8\pi\times10^3$

根据傅里叶变换的频域卷积性质和时域卷积性质，则有

$$X_{\mathrm{P}}(\omega)=\left\{\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)\right\}H_0(\omega) \text{（2 分）} \quad (5\text{-}3)$$

其中，$P(\omega)$ 和 $H_0(\omega)$ 分别是单位周期冲激串 $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 和(5-2)式表示的零阶保持系统 $h_0(t)$ 的傅里叶变换，且有