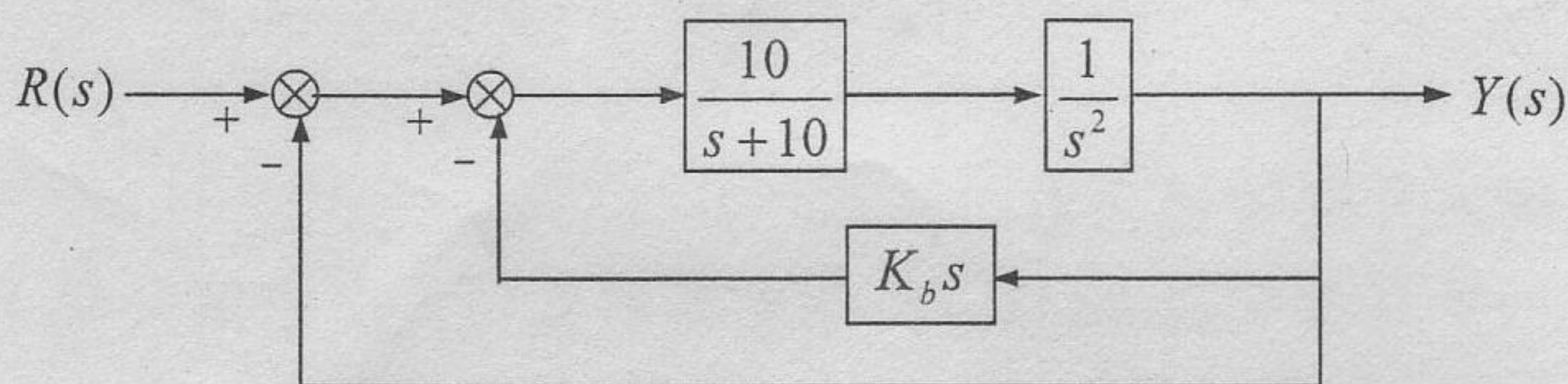


试题名称： 自动控制理论

一、(21 分) 单位负反馈控制系统如下图所示。



1. 试确定使系统闭环稳定的反馈系数  $K_b$  的取值范围。
2. 若已确定系统的一个闭环极点为  $-5$ ，试求  $K_b$  的取值和其余的闭环极点。
3. 根据第 2 题得到的系统配置，采用时域方法分析系统的瞬态性能和稳态性能。

二、(21 分) 对一单位负反馈系统，施加输入测试信号

$$r(t) = 1(t) \quad (t \geq 0)$$

其输出的零状态响应为

$$y(t) = 1 + 2e^{-2t} - 3e^{-4t} \quad (t \geq 0)$$

1. 试确定系统的传递函数  $Y(s)/R(s)$ 。
2. 概略绘制系统的单位阶跃响应曲线。
3. 指出该单位阶跃响应的主要特点。



$$\text{六: 1. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad -2]$$

$$\therefore M_c = [b : Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 满秩, } \therefore \text{系统可控.}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2-2a \end{bmatrix}, \det M_o = -2a$$

$\therefore a \neq 0$  时系统可观,  $a = 0$  时系统不可观

$$\text{又因: } f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -1 & \lambda-a \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-2)$$

显然系统渐近稳定的充要条件是:  $-(a+1) > 0$  且  $(a-2) > 0$

即  $a < -1$  且  $a > 2$ . 当然这是不可能的.

而当  $a = 0$  时系统不可观 (有零极点对消), 此时系统的传递函数为:

$$\hat{g}(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{s-2}{s^2-s-2} = \frac{(s-2)}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{s+1}$$

当然, 系统是 BIBO 稳定的.

2. 由上知  $a = 1$  时, 系统可观, 故系统存在渐近观测器.

又因  $\text{rank } c = 1$ , 故最小维观测器为  $2-1=1$  维.

设观测器为:

$$\dot{\hat{z}} = f\hat{z} + Tb u + l y, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

只须求解:  $TA - fT = lc$ , (保证  $\{f, l\}$  可控)

由观测器极点要求知  $f = -5$ , 由  $(f, l)$  可控且须  $l \neq 0$

设  $T = [t_1 \quad t_2]$  则由

$$[t_1 \quad t_2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 5 \cdot [t_1 \quad t_2] = l \cdot [1 \quad -2]$$

可解得:  $T = [t_1 \quad t_2] = \frac{l}{17} [4 \quad -7]$  取  $l = 17$  则

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = -5\hat{z} + [4 \quad -7] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + 17y \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \hat{z} \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{z}} = -5\hat{z} + 4u + 17y \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{z} - \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} y \end{cases}$$



证: 1. 设变换为  $P=Q^{-1}$  即变换后特征多项式为

$$f_1(\lambda) = \det(sI - A), \quad f_2(\lambda) = \det(sI - \bar{A}) = \det(sI - PAP^{-1})$$

$$\begin{aligned} \text{而 } f_2(\lambda) &= \det[P \cdot sI - P^{-1} - P \cdot A \cdot P^{-1}] = \det P \det(sI - A) \cdot \det(P^{-1}) \\ &= \det(sI - A) \quad \left( \text{这是因为 } \det(P^{-1}) = \frac{1}{\det P} \right) \\ &= f_1(\lambda) \end{aligned}$$

而系统渐近稳定性完全取决于系统的特征多项式, 故得证.

2. 因  $\{A, b\}$  可控, 一定存在线性变换使  $\{A, b\}$  等价于可控标准型  $\{A_c, b_c\}$  即有非奇异  $P$  使

$$PAP^{-1} = A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad Pb = b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}_c = CP^{-1} = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \text{ 则}$$

$$M_0^c = \begin{bmatrix} c_c \\ c_c A_c \\ \vdots \\ c_c A_c^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I, \text{ 满秩, 此时}$$

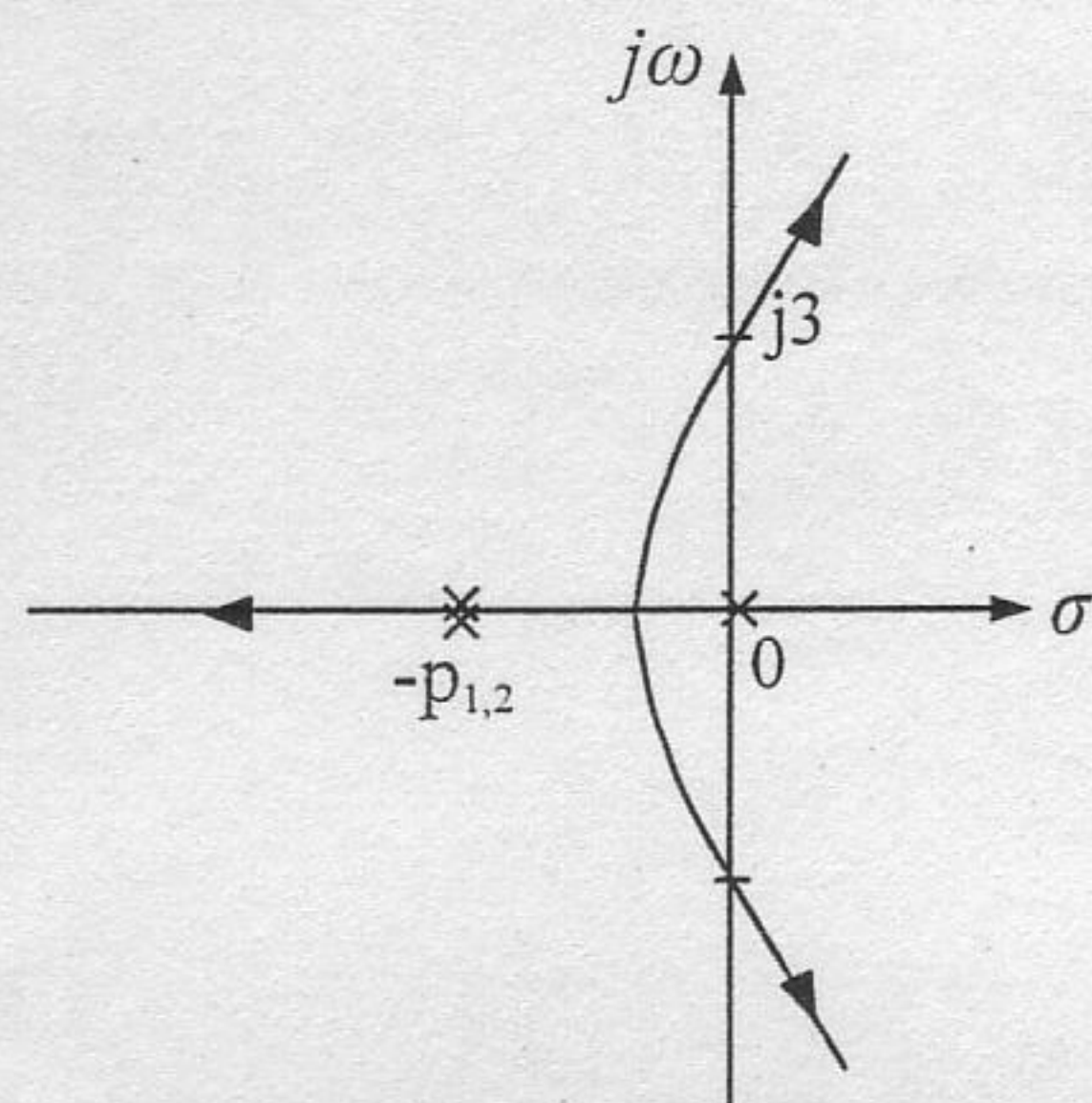
$$(A_c, c_c) \text{ 可观} \iff (A, c) \text{ 可观}.$$

$$\text{只须取 } c = c_c P \text{ (即 } P \text{ 的第 } n \text{ 行)}$$

问题得证.

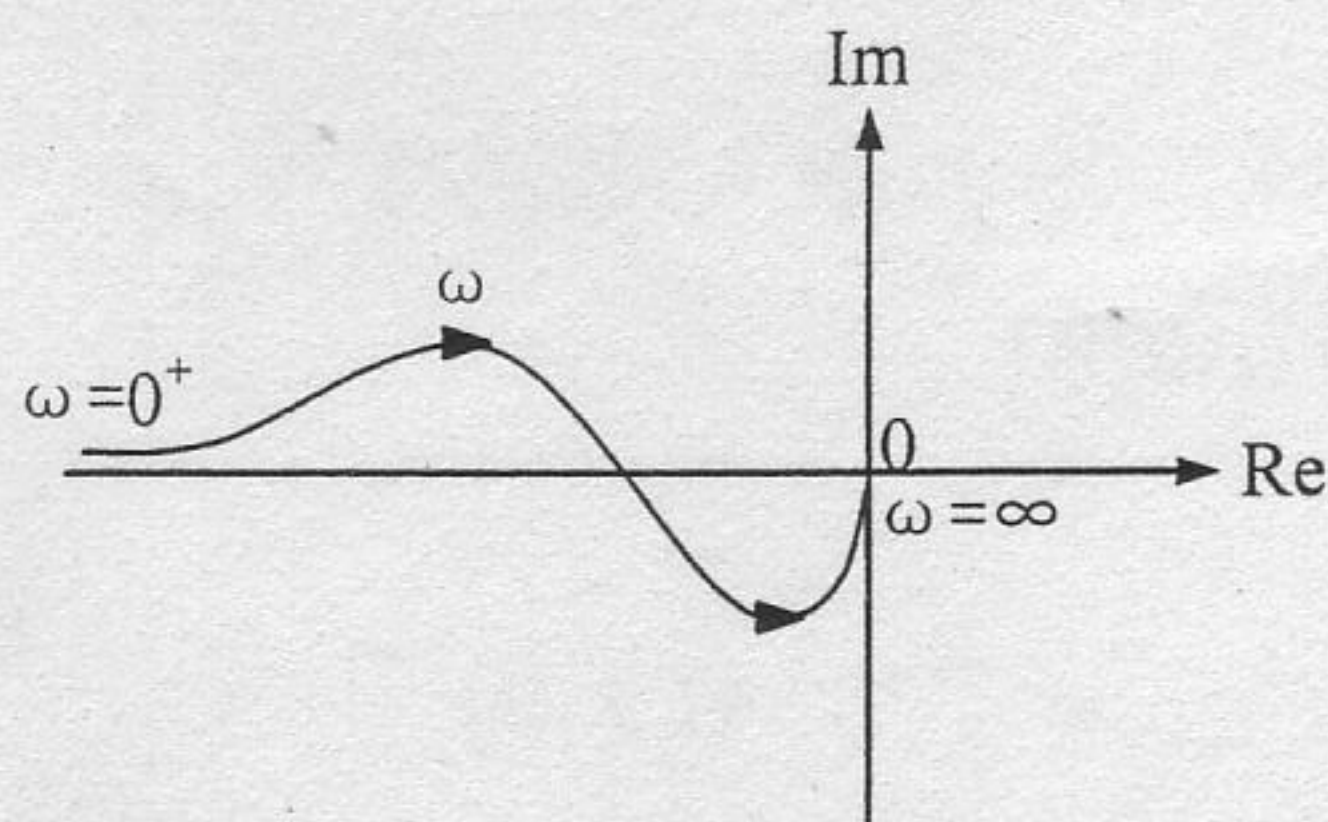


三、(24 分) 设单位负反馈系统的根轨迹图如图所示。



1. 确定系统的开环传递函数。
2. 试设计一串联控制器  $K(s)$ ，并确定其参数值。要求满足以下条件：
  - ① 闭环系统稳定；
  - ② 闭环极点个数不变；
  - ③ 根轨迹主要分支过闭环极点  $-2 \pm j4$ 。
3. 画出校正后系统的根轨迹图。闭环极点  $-2 \pm j4$  是否为系统的主导极点？概述理由。

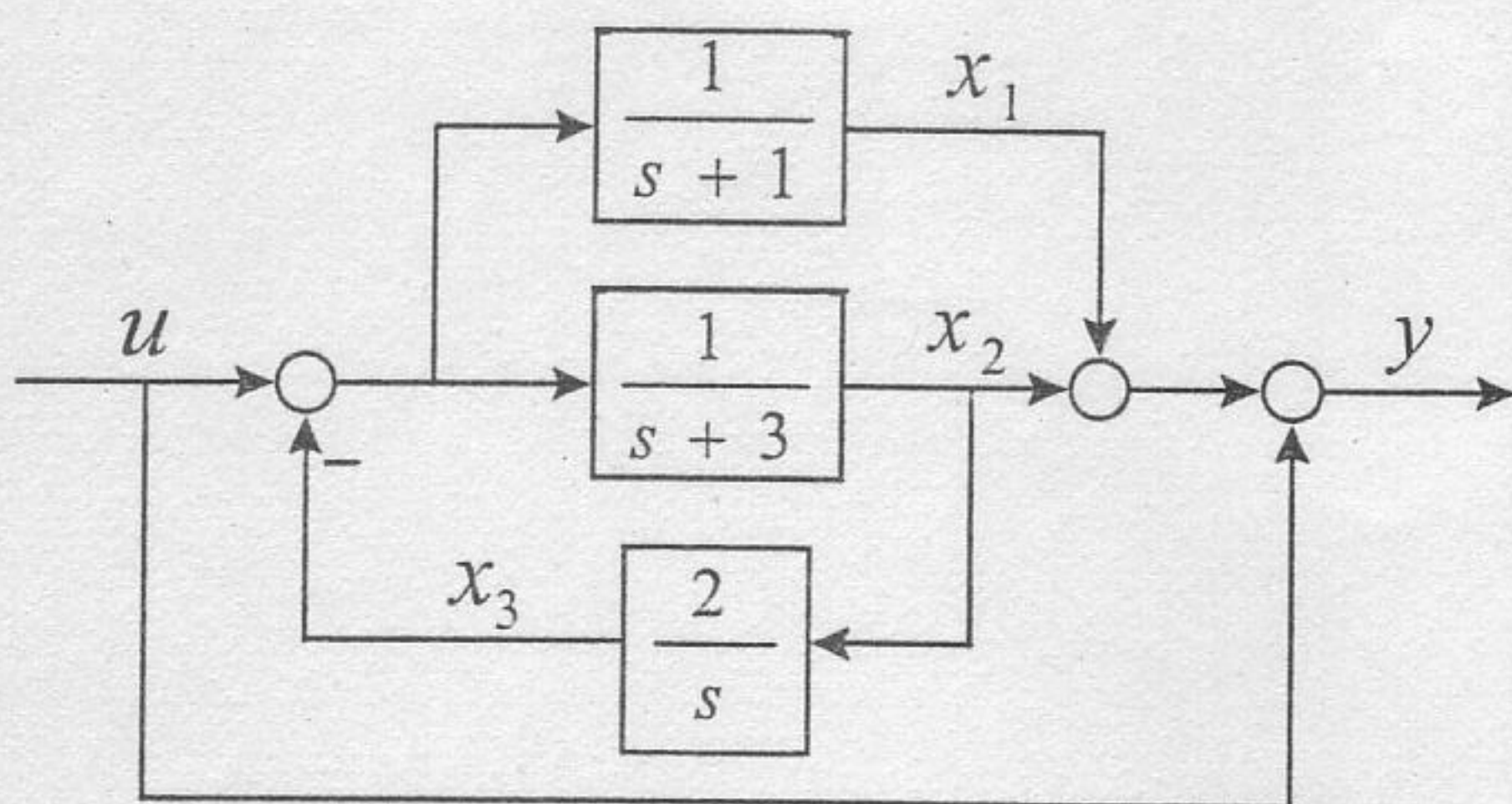
四、(24 分) 已知最小相位系统的幅相特性如图所示。



1. 据幅相特性，写出与之对应的开环传递函数，并指出参数间关系。
2. 用奈氏稳定判据，定性分析闭环系统稳定性与开环增益  $K$  的关系。
3. 设计一串联控制器  $K(s)$ ，使  $K > 0$  时闭环系统都稳定。给出  $K(s)$  的传递函数和参数取值范围，并画出校正后系统的完整奈氏图。



五、(20 分) 已知系统的动态结构图如下:



1. 列写系统的状态空间表达式;
2. 当初态  $x_1(0)=1$ ,  $x_2(0)=-1$ ,  $x_3(0)=0$ , 输入  $u$  是单位阶跃信号时, 求状态  $x(t)$  的表达式及输出  $y(2)$  的值。

六、(20 分) 已知系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \\ y = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

1. 分析参数  $a$  对系统的能控性、能观性、渐近稳定性和 BIBO 稳定性的影响;
2. 当  $a=1$ , 且系统的状态不可直接量测时, 若可能, 设计极点均位于-5 处的最小维状态观测器。

七、(20 分) 1. 对线性定常系统, 证明: 线性变换不改变系统的渐近稳定性。

2. 对单输入-单输出线性定常系统  $\{A, b, c\}$ , 证明: 若  $\{A, b\}$  能控, 则一定存在行向量  $c$ , 使  $\{A, c\}$  能观。



40分

# 2005年硕士学位研究生入学试题参考答案

## (自动控制理论)

1. 开环传递:  $G(s) = \frac{10}{s(s^2 + 10s + 10K_b)}$

闭环特征方程:  $D(s) = s^3 + 10s^2 + 10K_b s + 10 = 0 \quad (1)$

Routh阵列:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 10K_b \\ s^2 & 10 & 10 \\ s^1 & 1 & 1 \\ s^0 & 10K_b - 1 & 10 \end{array}$$

系统闭环稳定, 中经

$$10K_b - 1 > 0$$

$$K_b > 0.1$$

2. 根据题意, 可得

$$D(s) = (s+5)(s^2 + as + b)$$

$$= s^3 + (a+5)s^2 + (5a+b)s + 5b = 0 \quad (2)$$

比较式(1)、(2), 有

$$\begin{cases} a+5=10 \\ 5b=10 \\ 5a+b=10K_b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \\ K_b=2.7 \end{cases}$$

另一个闭环极点:  $s^2 + 5s + 2 = 0$

$$\therefore s_{2,3} = -4.56, -0.44$$

3.  $G(s) = \frac{10}{s(s^2 + 10s + 27)}$

$K_v = \frac{10}{27} \Rightarrow e_{ss} = 2.7$  (对斜坡信号输入的跟踪稳误差)

p1



$$s_3 = -0.44 \text{ — 主导极点} \Rightarrow \begin{cases} 3T = 6.81s & (\Delta = 5\%) \\ 4T = 9.08s & (\Delta = 2\%) \end{cases}$$

$$\text{闭环传递函数: } W(s) = \frac{10}{(s+5)(s+4.56)(s+0.44)} \approx \frac{0.44}{s+0.44}$$

$$\text{单位阶跃响应: } y(t) = 1 - e^{-0.44t} \quad (t \geq 0)$$

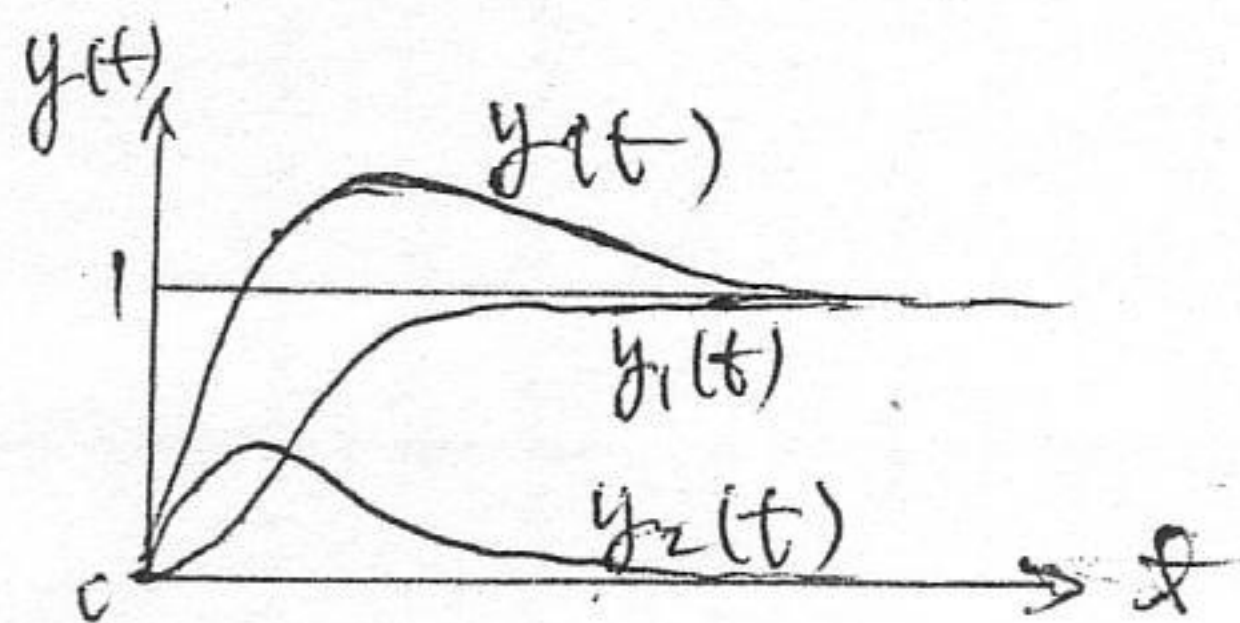
$$1. \quad Y(s) = \frac{8(s+1)}{s(s+2)(s+4)}$$

$$\therefore \text{闭环传递函数: } \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{8(s+1)}{s^2+6s+8}$$

$$2. \quad Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{8}{s^2+6s+8} \cdot \frac{1}{s} + \frac{8}{s^2+6s+8}$$

$$\omega_n = \sqrt{8} = 2.83 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 1.06 \quad (\text{二阶系统无超调})$$



3. 为具有两个零点的二阶系统. 阶跃响应的主要特征:

二部分:  $\begin{cases} \text{二阶系统的单位阶跃响应 (无超调)} > \text{有超调} \\ \text{二阶系统的脉冲响应} < \text{振荡} \end{cases}$

又: 闭环零点位于闭环极点右侧, 零极点影响比较

显著  $\Rightarrow$  使系统的超调增大, 但响应基本特性不变。



三. 1. 开环传递函数为  $G(s) = \frac{k}{s(s+p)^2}$

$$D(s) = s(s+p)^2 + k = 0 \xrightarrow{s=j3} j3(-9 + j6p + p^2) + k = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p=3 & (\text{主导极点}) \\ k=54 \end{cases}$$

$$\therefore G(s) = \frac{k}{s(s+3)^2}$$

2. 设计  $K(s) = s + z$

$$\text{则 } Q(s) = G(s)K(s) = \frac{k(s+z)}{s(s+3)^2}$$

$$\text{在 } s_d = -2 \pm j4, \text{ 应满足: } \angle Q(s) \big|_{s=-2+j4} = -180^\circ$$

$$\therefore \angle \frac{4}{z-2} - 116.57^\circ - 151.92^\circ = -180^\circ$$

$$\therefore \angle \frac{4}{z-2} = 88.49^\circ \Rightarrow z = 2.1$$

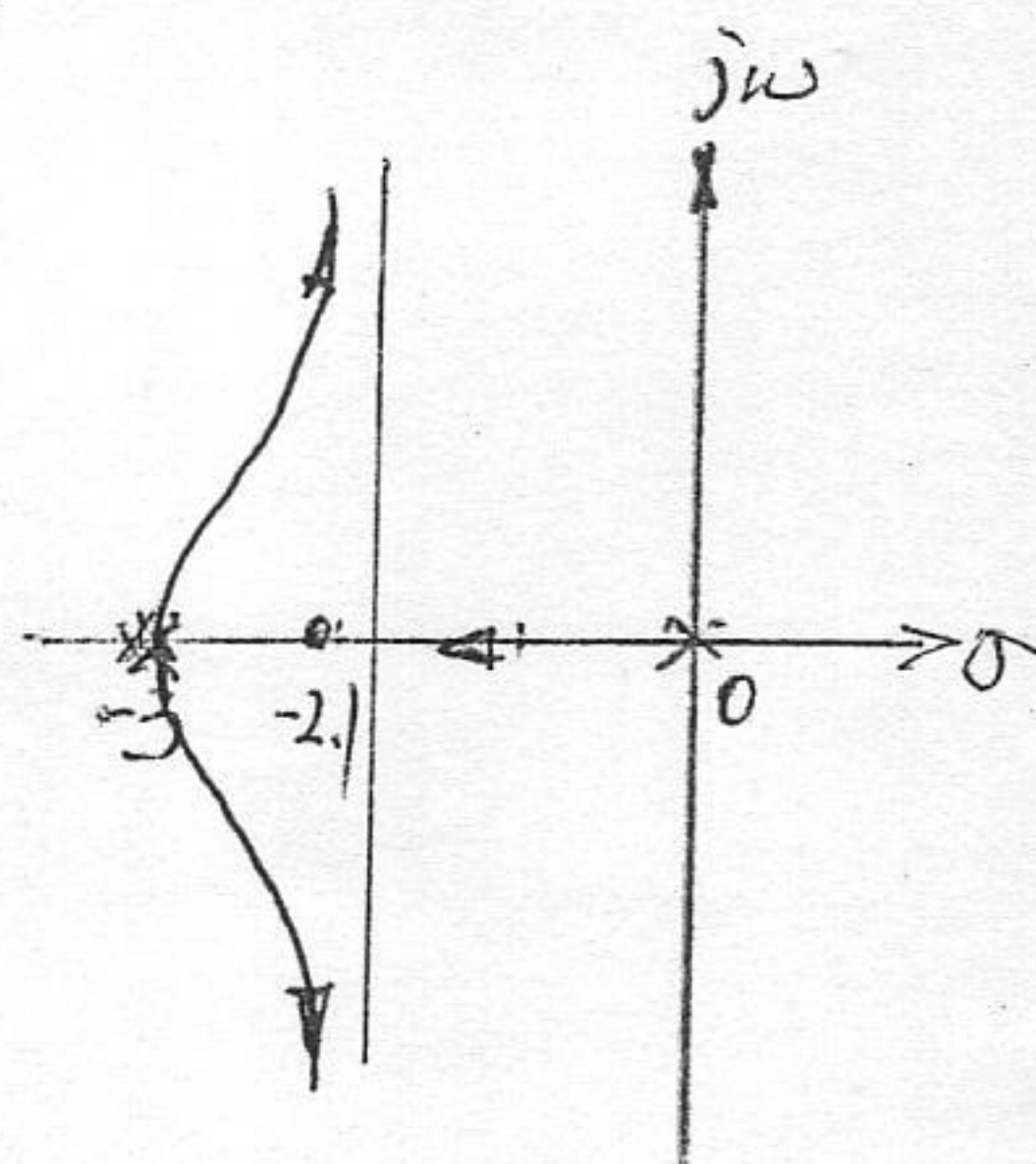
$$\therefore K(s) = s + 2.1$$

3. 设另一闭环极点是  $-\lambda_3$

$$\text{则 } (2+j4) + (2-j4) + \lambda_3 = 6 \Rightarrow \lambda_3 = 2$$

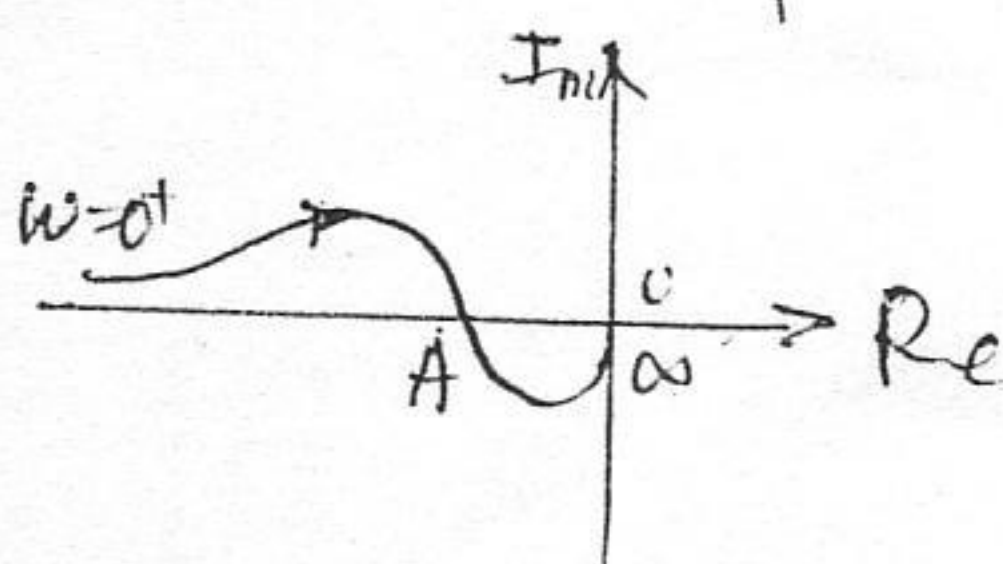
$$\begin{cases} -\lambda_3 = -2 \\ -z = -2.1 \end{cases} \text{ 构成一对闭环偶极子, 故 } \lambda_3 \text{ 为非主导极点.}$$

$$\therefore s_d = -2 \pm j4 \text{ 为一对主导极点.}$$



四. 1. 开环传递函数:  $G(s) = \frac{K(T_2s+1)(T_3s+1)}{s^2(T_1s+1)}$  ( $T_1 > T_2, T_3$ )

2. 设  $K=K_1$  时, 幅相特性与负实轴交点为  $A(-1, j0)$





稳定性分析:

当  $K > K_1$  时,  $(-1, j0)$  点位于  $A$  点右侧

$\therefore n_c = n_o + N = 0 \Rightarrow$  闭环系统稳定

当  $0 < K < K_1$  时,  $(-1, j0)$  点位于  $A$  点左侧

$\therefore n_c = n_o + N = 2 \Rightarrow$  闭环系统不稳定。

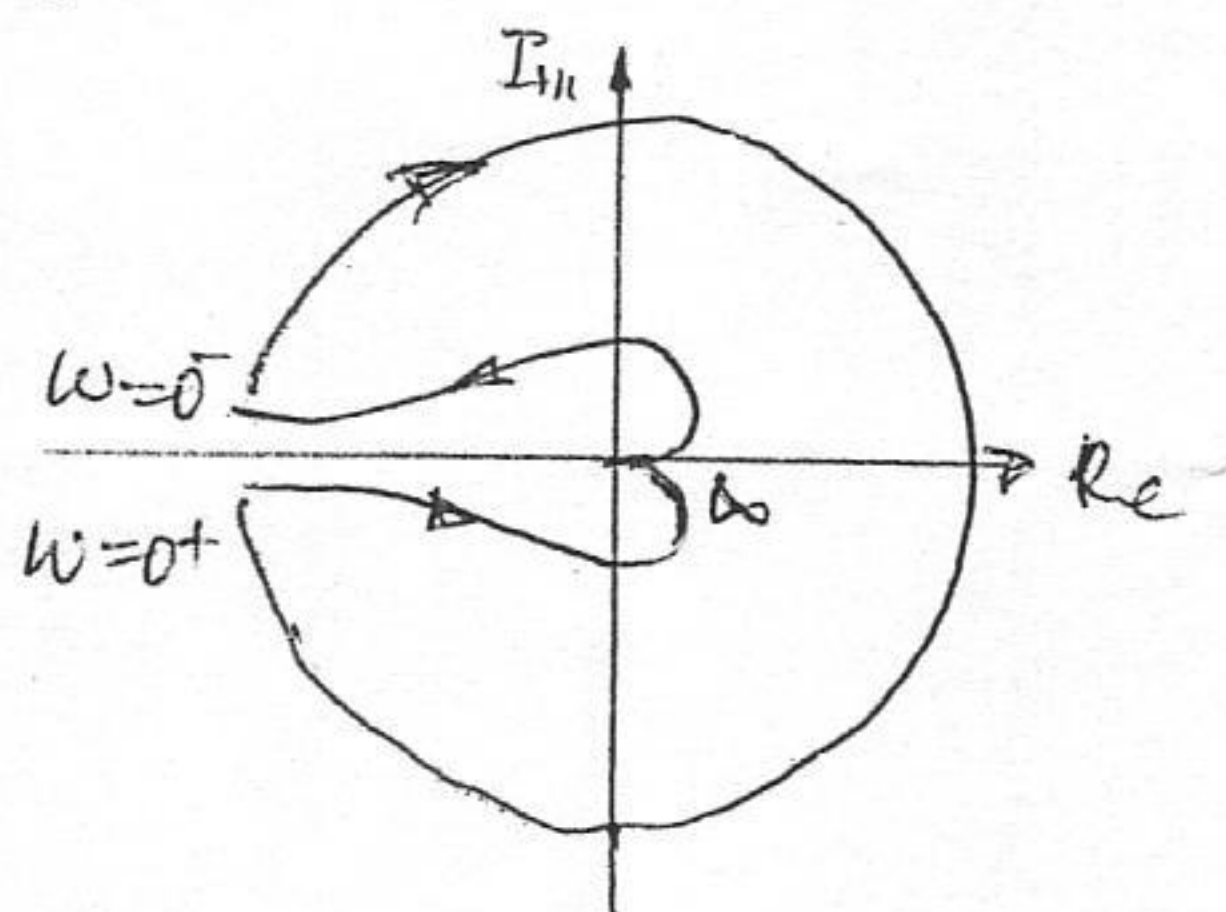
当  $K = K_1$  时,  $(-1, j0)$  点位于  $A$  点  $\Rightarrow$  系统临界稳定。

3. 设计  $K(s) = T_2 s + 1$  (取  $T_2 \geq T_1$ )

$$\text{则 } Q(s) = G(s)K(s) = \frac{K(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$

$Q(s)$  的完整奈氏图:

$K > 0$  时闭环系统均稳定。



或者:

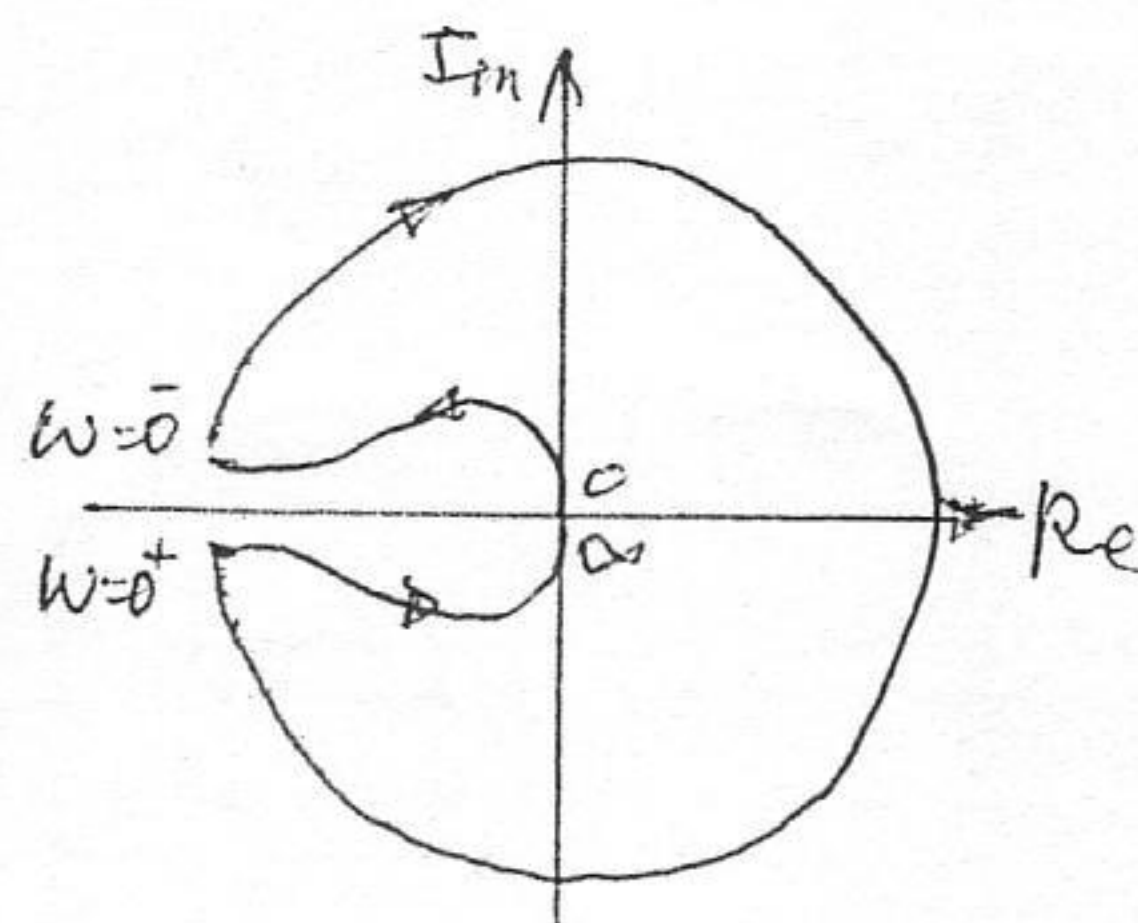
$$\text{设计 } K(s) = \frac{T_2 s + 1}{T_p s + 1} \quad (T_2 > T_p)$$

$$\text{则 } Q(s) = G(s)K(s) = \frac{K(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)(T_p s + 1)}$$

取合适的  $T_2, T_p$ , 如:  $T_2 > T_1, T_p < T_2, T_3$

$Q(s)$  的完整奈氏图:

$K > 0$  时闭环系统均稳定。





五. 1. 由结构图可见:

$$\hat{x}_1(s) = \frac{1}{s+1} [\hat{u}(s) - \hat{x}_3(s)]$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1(t) = -x_1 - x_3 + u$$

$$\hat{x}_2(s) = \frac{1}{s+3} [\hat{u}(s) - \hat{x}_3(s)]$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2(t) = -3x_2 - x_3 + u$$

$$\hat{x}_3(s) = \frac{2}{s} \hat{x}_2(s)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3(t) = 2x_2$$

$$\hat{y}(s) = [\hat{x}_1(s) + \hat{x}_2(s)] + \hat{u}(s)$$

$$\Rightarrow y(t) = x_1 + x_2 + u$$

若记系统状态空间表达式为

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx + du$$

则  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = [1 \ 1 \ 0], d = 1$

2. 系统的特征多项式为

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$$

求解:  $(\lambda_1 I - A)\underline{p}_1 = 0, (\lambda_2 I - A)\underline{p}_2 = 0, (\lambda_3 I - A)\underline{p}_3 = 0$

得:  $\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{At} = e^{Q\Lambda Q^{-1}t} = Q e^{\Lambda t} Q^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-2t} & e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & -e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 0 & 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$



$$\therefore x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A\tau} b u(t-\tau) d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} - 2te^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{-\tau} - 2\tau e^{-\tau} - 2e^{-2\tau} \\ -e^{-\tau} + 2e^{-2\tau} \\ 2e^{-\tau} - 2e^{-2\tau} \end{bmatrix} \cdot 1 d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 4te^{-t} + 3e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 3e^{-2t} \\ 1 - 4e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

这其中用到:

$$\int_0^t e^{-\tau} d\tau = (1 - e^{-t}), \quad \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau = -te^{-t} + (1 - e^{-t}), \quad \int_0^t 2e^{-2\tau} d\tau = (1 - e^{-2t})$$

$$\therefore y(t) = c x(t) + d \cdot u(t) = [1 \ 1 \ 0] x(t) + 1 \cdot u(t)$$

$$= 4te^{-t} + 1,$$

$$\therefore y(2) = 1 + 8e^{-2}.$$