2006年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

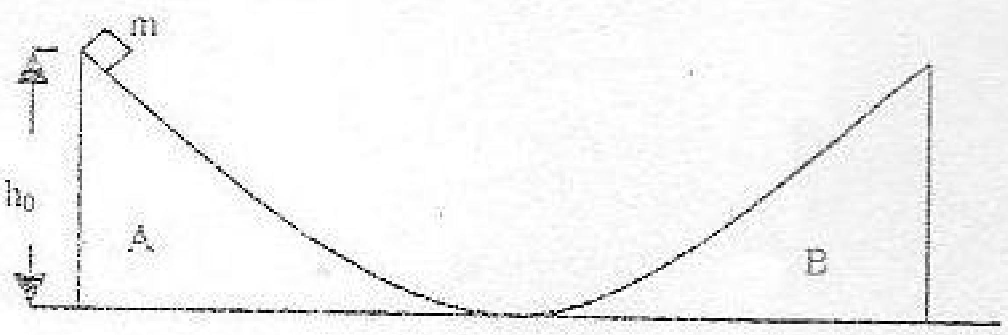
*说明：全部答题包括填空、选择题必须答在考点下发的答题纸上，否则，一律无效。

试题名称： 普通物理 B

一、（15 分）一质点在 xoy 平面内运动，运动方程为 $\begin{cases} x = 2t \\ y = 19 - 2t^2 \end{cases}$ 式中 x、y 以米计，t 以秒计。

1) 写出 1 秒末的瞬时速度和瞬时加速度；
2) 在什么时刻，质点的位置矢量与其速度矢量恰好垂直？这时，它们的 x、y 分量各为多少？
3) 在什么时刻，质点离原点最近？算出这一距离。

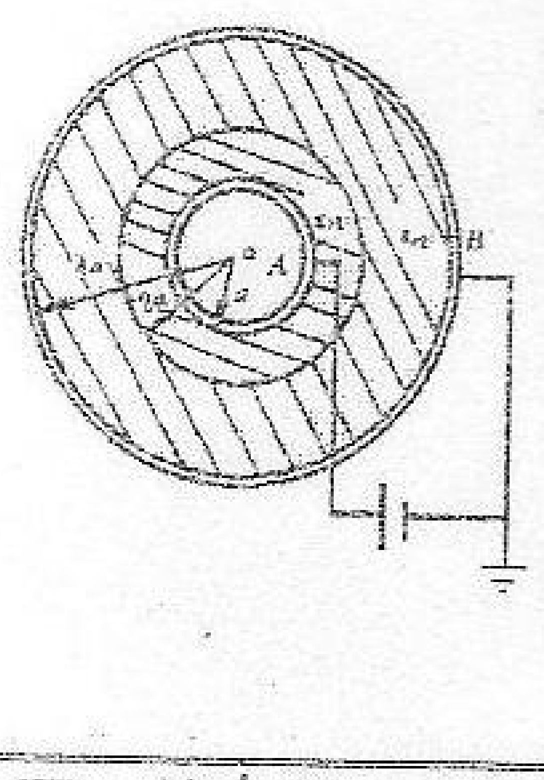
二、（20 分）两个形状完全相同，质量都为 M 的弧形导轨 A 和 B，放在地板上。今有一质量为 m 的小物块，由静止状态由 A 的顶端下滑，A 顶端的高度为 h_0。所有接触面均光滑，试求小物块在 B 轨上上升的最大高度（设 A、B 导轨与地面相切）。



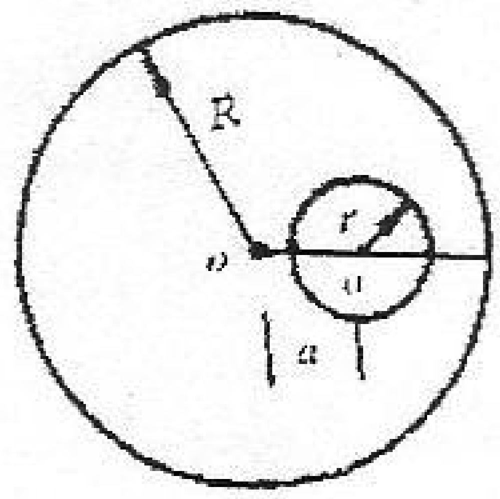
三、（20 分）飞轮对自身轴的转动惯量为 I_0，初角速度为 ω_0。作用在飞轮上的阻力矩为 $M = \alpha\omega$ （α 为常量），试求飞轮的角速度减到 $\dfrac{\omega_0}{2}$ 时所需的时间，以及在这段时间内飞轮转过的圈数 N。

四、（20 分）A 、B 为两同心导体薄球壳，其半径分别为 a 和 4a，球壳间充满两层电介质。介质分界面的半径为 2a。两层介质的相对介电常数分别为 $\varepsilon_{r1} = 4$，$\varepsilon_{r2} = 2$。A、B 间接有电源，A 球壳带电为+Q，如图所示。求：

1) r=a 处的 D、E、P ；
2) A 球壳的电位；
3) r = 2a 到 r = 4a 空间的电场能量。



五、（15 分）在半径为 5cm 的无限长金属圆柱内部挖去一半径为 $r=1.5cm$ 的无限长圆柱体，两柱体轴线平行，轴间距离 a=2.5cm。现在此空心导体上通以电流 5A，电流沿截面均匀分布，求导体空心部分轴线上任一点的磁感应强度 $\vec{B}$。



六、（20 分）同轴圆柱和圆筒导体组成的无限长电缆，其间充满了磁导率为 μ 的介质。内圆柱和外圆筒内层的横截面半径分别为 R_1 和 R_2。求：单位长度电缆的自感系数。若圆柱和圆筒导体流过大小相等方向相反的电流，电流以 $\frac{di}{dt}$ 的速率增强．问单位长度电缆的自感电动势是多少？

七、（20 分）氢原子由基态被激发到 $n=4$ 的激发态，请问：

（1） 原子吸收的能量？

（2） 原子回到基态时可能发射的光子的波长，并标明他们所属的谱系。

（$h=6.6260755\times10^{-34}J\cdot s$； $c=299792548m\cdot s^{-1}$）

八、（20 分）一电子束在电场中经电压 V 加速

（1） 求电子在离开电场后的德布罗意波波长是多少？

（2） 此德布罗意波的相速度是多少？群速度是多少？

（3） 把电子束射到一块单晶上，在入射方向与晶面成 θ 角时，观察到散射电子束的第一级强度极大值，问晶面间的距离 d 是多少？

（$h=6.626\times10^{-34}J\cdot s$，$e=1.6\times10^{-19}C$，$m_e=9.1\times10^{-31}kg$）

科目名称：	普通物理 B

一． 一质点在 xoy 平面内运动，运动方程为 $\begin{cases} x = 2t \\ y = 19 - 2t^2 \end{cases}$

式中 x、y 以米计，t 以秒计。

(1) 写出 1 秒末的瞬时速度和瞬时加速度；

(2) 在什么时刻，质点的位置矢量与其速度矢量恰好垂直？这时，它们的 x、y 分量各为多少？

(3) 在什么时刻，质点离原点最近？算出这一距离。

解：1.

$$\vec{r} = 2t\vec{i} + (19 - 2t^2)\vec{j} \qquad \therefore \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 4t\vec{j}$$

$$\therefore \vec{v}(1) = 2\vec{i} - 4\vec{j} \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad v = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 4.47 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -4\vec{j}, \ \text{其大小} a = 4 \ \mathrm{m/s^2}$$

2.

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = [2t\vec{i} + (19 - 2t^2)\vec{j}] \cdot (2\vec{i} - 4t\vec{j}) = 4t - (19 - 2t^2)4t = 0$$

$$\therefore 4t[1 - 19 + 2t^2] = 0$$

$$\therefore t_1 = 0, \ t_2 = 3s, \ t_3 = -3s(\text{舍去})$$

t=0 时，$\begin{cases} \vec{r} = 19\vec{j} \\ \vec{v} = 2\vec{i} \end{cases}$； t=3 时，$\begin{cases} \vec{r} = 6\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = 2\vec{i} - 12\vec{j} \end{cases}$

3.

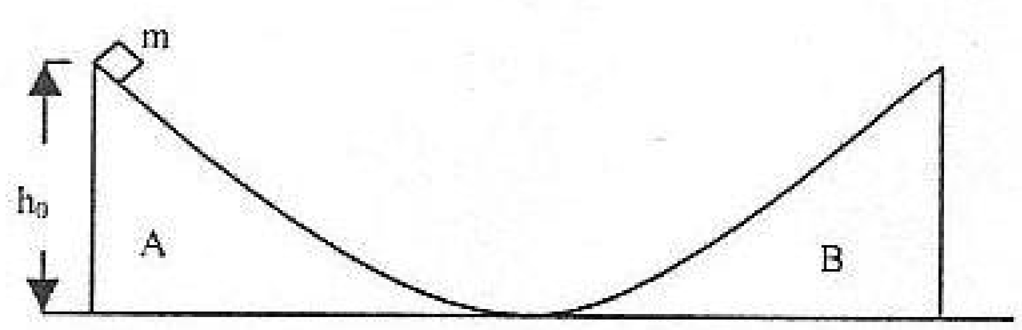
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2t)^2 + (19 - 2t^2)^2}$$

取极值，令 $\frac{dr}{dt} = 0$ 有 $8t(1 - 19 + 2t^2) = 0$

得：$t = 0, t = 3s, t = -3s$(舍去)

$r(0) = 19m, r(3) = 6.08m, \ r(0) > r(3)$

所以 t=3s 时质点的位置离原点最近，其距离为 6.08m。



二．两个形状完全相同，质量都为 M 的弧形导轨 A 和 B，放在地板上。今有一质量为 m 的小物块，由静止状态由 A 的顶端下滑，A 顶端的高度为 h_0。所有接触面均光滑，试求小物块在 B 轨上上升的最大高度（设 A、B 导轨与地面相切）。

解：设小物块沿A轨道下滑质地板时的速度为v，对小物块与A组成的系统，应用水平方向动量守恒和机械能守恒，求出物块的水平速度：

$$\begin{cases} -Mv_A + mv = 0 & (1) \\ mgh_0 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}mv^2 & (2) \end{cases}$$

解得：$v = \sqrt{2Mgh_0/(M+m)}$

当小物块以初速度v沿B轨上升到最大高度H时，此时小物块相对B轨的速度为零。设小物块与B轨相对地沿水平发表方向的共同速度为u，据动量守恒和机械能守恒有：

$$\begin{cases} mv = (M+m)u & (3) \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(M+m)u^2 + mgH & (4) \end{cases}$$

可解得：$H = \frac{Mv^2}{2(M+m)g} = (\frac{M}{M+m})^2 h_0$

三. 飞轮肆自身轴的转的惯量为 I_0，初角速度为 w_0，作用在飞轮上的阻力矩为 $M=\alpha w$（α为常量），试求飞轮的角速度减到 $\frac{w_0}{2}$ 时所需的时间，以及在这段时间内飞轮转过的圈数N。

解：据转动定律：

$$-\alpha\omega = \frac{dL}{dt} = I_0\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\alpha}{I_0}dt$$

两边积分：$\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t(-\frac{\alpha}{I_0})dt \Rightarrow \omega = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{I_0}t}$

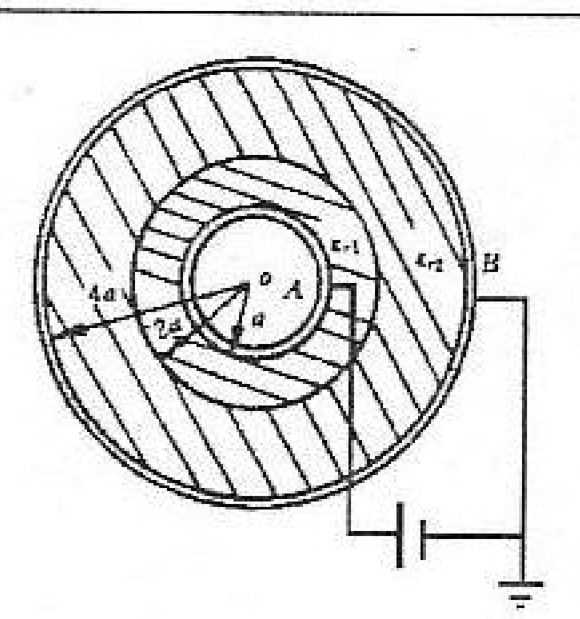
当 $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ 时，$t = t_1 = \frac{I_0}{\alpha}\ln 2$

转过角度：

$$\Delta\theta = \int_0^{t_1}\omega dt = \int_0^{t_1}\omega_0 e^{-\frac{\alpha}{I_0}t}dt = \frac{I_0\omega_0}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{I_0}t_1}) = \frac{I_0\omega_0}{2\alpha}$$

转过圈数：$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{I_0\omega_0}{4\pi\alpha}$

四、 A、B为两同心导体薄球壳，其半径分别为a和4a，球壳间充满两层电介质。介质分界面的半径为2a。两层介质的相对介电常数分别为 $\varepsilon_{r1}=4$， $\varepsilon_{r2}=2$。 A、B间接有电源. A球壳带电为+Q，如图所示。

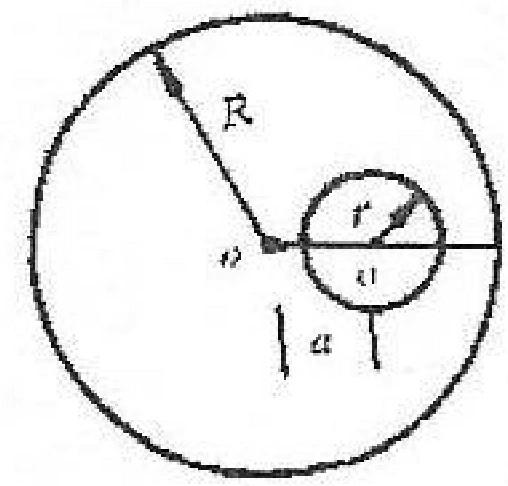


求：(1) r=a 处的D、E、P；(2) A球壳的电位；(3) r＝2a到r＝4a空间的电场能量。

解：（1）据高斯定理可求得：$a<r<2a$ 间的 $\vec{D}=\dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$

∴当 $r=a$ 时， $\vec{D}=\dfrac{Q}{4\pi a^2}\hat{r}$， $\vec{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}a^2}\hat{r}$，

$$\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)\vec{E}=\frac{(\varepsilon_{r1}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r1}a^2}\hat{r}=\frac{3Q}{16\pi a^2}\hat{r}$$



（2） $U=\displaystyle\int_a^{2a}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2}dr+\int_{2a}^{4a}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2}dr=\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a}$

(3) $W=\displaystyle\int_V w_e dV=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 dV=\frac{1}{2}\int_{2a}^{4a}\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2}\right)^2\cdot 4\pi r^2 dr=\frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0 a}$

五、在半径为5cm的无限长金属圆柱内部控去一半径为 $r=1.5cm$ 的无限长圆柱体，两柱体轴线平行，轴间距离a=2.5cm。现在此空心导体上通以电流5A，电流沿截面均匀分布，求导体空心部分轴线上任一点的磁感应强度 $\vec{B}$。

解：空心导体柱横截面上电流的分布为： $j=\dfrac{I}{\pi(R^2-r^2)}$

现把空心柱看成有相同电流密度的实心柱与反向等电流密度（半径为r的）小导体柱的叠加。则空心柱轴线上任一点的磁场由这两部分电流共同产生， 以0为圆心、以00′为半径作环路得：

$B_1 2\pi a=\mu_0 j\pi a^2=\dfrac{\mu_0 I\pi a^2}{\pi(R^2-r^2)}$， $B_1=\dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi(R^2-r^2)}$

小柱体（反向电流）在自己的轴上的磁场为零。

$$\therefore B_{O'}=B_1=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi(R^2-r^2)}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times5\times2.5\times10^{-2}}{2\pi(5^2-1.5^2)\times10^{-4}}=1.1\times10^{-9}(T)$$

六、同轴圆柱和圆筒导体组成的无限长电缆，其间充满了磁导率为μ的介质。内圆柱和外圆筒内层的半径分别为R_1和R_2。求：单位长度电缆的自感系数。若圆柱和圆筒导体流过大小相等方向相反的电流，电流以$\frac{di}{dt}$的速率增强．问单位长度电缆的自感电动势是多少？

解：电缆的电流回路是通过轴线的纵截面在电缆内外导体上截出的相距R_2-R_1的平行往返回路。设电缆电流为I，对于长为l的一段矩形回路，由$\phi=LI$即可求出该段电缆的自感系数。

据圆柱电流的磁场公式，在两导体之间离轴线为 r 处的磁感应强度为：$B=\frac{\mu I}{2\pi r}$对于长为l的回路部分，距轴线 r 处的面积元$dS=ldr$的磁通量：

$$d\phi=BdS=\frac{\mu Il}{2\pi}\cdot\frac{dr}{r}$$

而穿过回路的总磁通量：$\phi=\int_S d\phi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu Il}{2\pi}\frac{dr}{r}=\frac{\mu Il}{2\pi}\ln(\frac{R_2}{R_1})$

由$\phi=LI$，得长为l的一段电缆的自感系数为：$L=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu l}{2\pi}\ln(\frac{R_2}{R_1})$

单位长度电缆的自感系数为：$L_0=\frac{\mu}{2\pi}\ln(\frac{R_2}{R_1})$。

当电流以$\frac{di}{dt}$速率变化时，对应的自感电动势为：$\varepsilon_L=-L_0\frac{di}{dt}=-\frac{\mu}{2\pi}\ln(\frac{R_2}{R_1})\frac{di}{dt}$

七、氢原子由基态被激发到$n=4$的激发态，请问：

（1） 原子吸收的能量？

（2） 原子回到基态时可能发射的光子的波长，并标明他们所属的谱系。

（$h=6.6260755\times10^{-34}J\cdot s$， $c=299792548m\cdot s^{-1}$）

解：（1）由公式：$E_n=-\frac{1}{2n^2}m_e\alpha^2c^2$ （$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}=7.2973508\times10^{-3}\approx\frac{1}{137}$）

或 $E_n=-\frac{2\pi^2m_ee^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2h^2n^2}$ （$n=1,2,3,\cdots$）

可知：$E_4=\frac{E_1}{n^2}\approx-\frac{13.6}{16}=-0.85(eV)$

原子吸收能量为：$E=E_4-E_1=12.75eV$

（3） 第四激发态回到基态时，其辐射可能的波长为：

- $n=4\rightarrow n=1$， $\lambda=\dfrac{hc}{E}=\dfrac{1242}{E}=97.4nm$ （赖曼系）
- $n=4\rightarrow n=2$， $\lambda=\dfrac{1242}{3.4-0.85}=487nm$

  相应 $\bar{\nu}=R_H(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{4^2})$ （巴耳末系）
- $n=2\rightarrow n=1$， $\lambda=\dfrac{1242}{13.6-3.4}=121.7nm$， $\bar{\nu}=R_H(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2})$ （赖曼系）
- $n=4\rightarrow n=3$， $\lambda=\dfrac{1242}{1.5-0.85}=1910.7nm$， $\bar{\nu}=R_H(\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2})$ （帕邢系）
- $n=3\rightarrow n=1$， $\lambda=\dfrac{1242}{13.6-1.5}=102.6nm$ （赖曼系）
- $n=3\rightarrow n=2$， $\lambda=\dfrac{1242}{3.4-1.5}=653.6nm$ （巴耳末系）

八、一电子束在电场中经电压 V 加速

（1） 求电子在离开电场后的德布罗意波波长是多少？

（2） 此德布罗意波的相速度是多少？群速度是多少？

（3） 把电子束射到一块单晶上，在入射方向与晶面成 θ 角时，观察到散射电子束的低一级强度极大值，问晶面间的距离是多少？

解：（1）

$$\frac{1}{2}mv^2=eV$$

$$\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{h}{\sqrt{2emV}}=\frac{12.25}{\sqrt{V}}(\overset{0}{A})$$

（2）相速： $v_p=\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{E/\hbar}{P/\hbar}=\dfrac{E}{P}=\dfrac{eV}{\sqrt{2emV}}=\sqrt{\dfrac{eV}{2m}}$

群速： $v_g=\dfrac{d\omega}{dk}=\dfrac{dE}{dP}=\dfrac{P}{m}=v=\sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$

（3）据布拉格公式：

$2d\sin\theta=\lambda=\dfrac{12.25}{\sqrt{V}}(\overset{0}{A})$ 有：

$d=\dfrac{12.25}{2\sin\theta\sqrt{V}}\overset{0}{A}$