

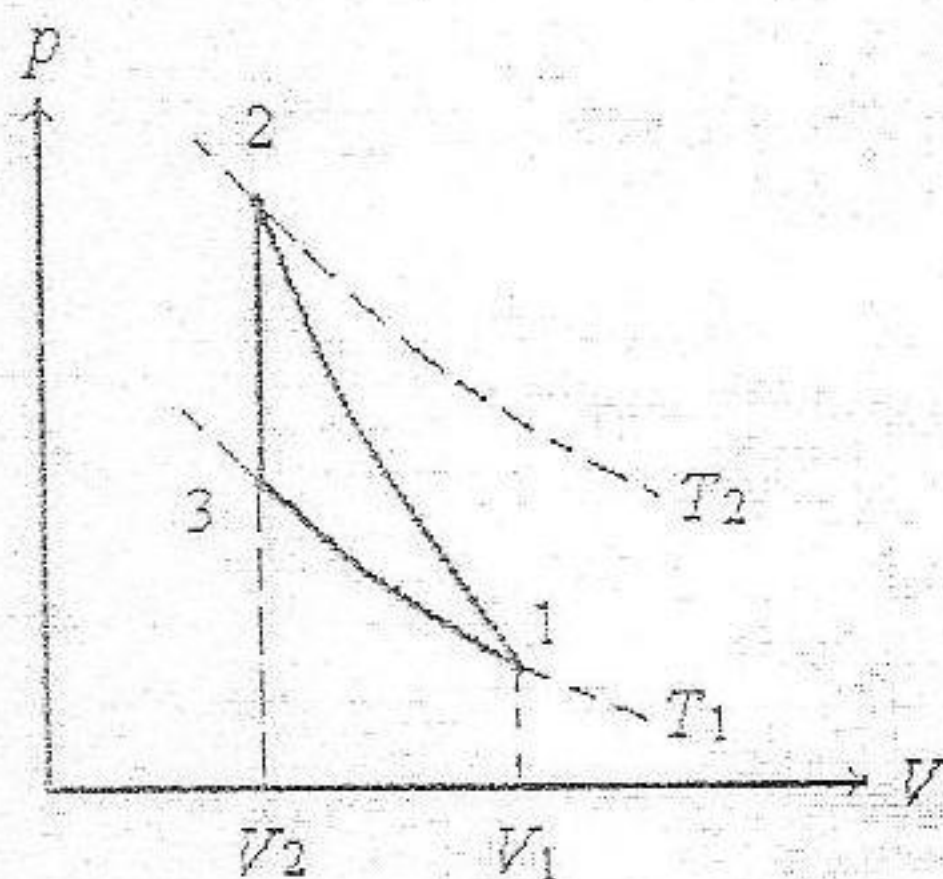
* 说明：全部答题包括填空、选择题必须答在考点下发的答题纸上，否则，一律无效。

试题名称：

热力学与统计物理

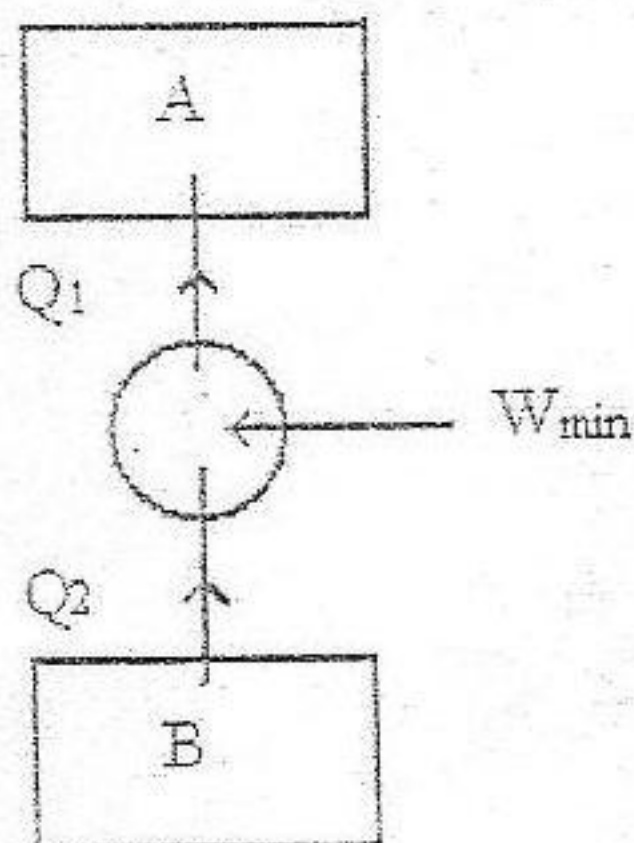
一，一理想气体经历下列循环过程：(1) 经多方过程 $pV^n = C$ 由体积 V_1 变到 $V_2 = \frac{V_1}{b}$ ；(2) 体积不变，冷却到原来的温度；(3) 等温膨胀到原来的体积，(见下图)，计算该气体在循环过程中所作的功与压缩过程中作的功之比。(答案中只出现 n 和 b)

[提示：在状态 1 处，既满足 $p_1 V_1^n = C$ ，又满足 $p_1 V_1 = NRT_1$]



二，有 A、B 两个物体，热容量均为 C ，且与温度无关。开始两物体温度均为 T ，现有一致冷机工作于两物体之间，当 B 的温度降至 A 的一半时，求此系统所做的最小功 W_{\min} (见图)。

[提示：先由系统的总熵变为零，求两物体的终温。]



三, 线性谐振子的能谱为 $\varepsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, 当系统温度足够低时, 振子仅占据基态和第一激发态。求振子处于第一激发态与基态的几率之比; 并计算振子的平均能量。
(玻尔兹曼分布)

四, 处于平衡状态的光子气体, 在体积 V 内, 温度为 T , 导出光子总数和能量密度的表达式, 说明它们与温度的依赖关系。(玻色分布)

[提示: 光子气体的化学势 $\mu = 0$, 光子的自旋量子数为 1, 自旋在动量方向上的投影可取两个可能值 $\pm\hbar$ (相当于左右偏振)]

$$\left(\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} \cdot dx = 2 \times 1.202 = \text{const.}; \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} \cdot dx = \frac{\pi^4}{15} = \text{const.} \right)$$

五, 由 N 个自由电子组成的二维电子气处在面积 S 内, 求: (1) 在能量范围 $\varepsilon - \varepsilon + d\varepsilon$ 内的量子态数; (2) $T=0K$ 时的费米能量 ε_F ; (3) $T=0K$ 时, 每个电子的平均能量 $\bar{\varepsilon}$ 。
(费米分布)

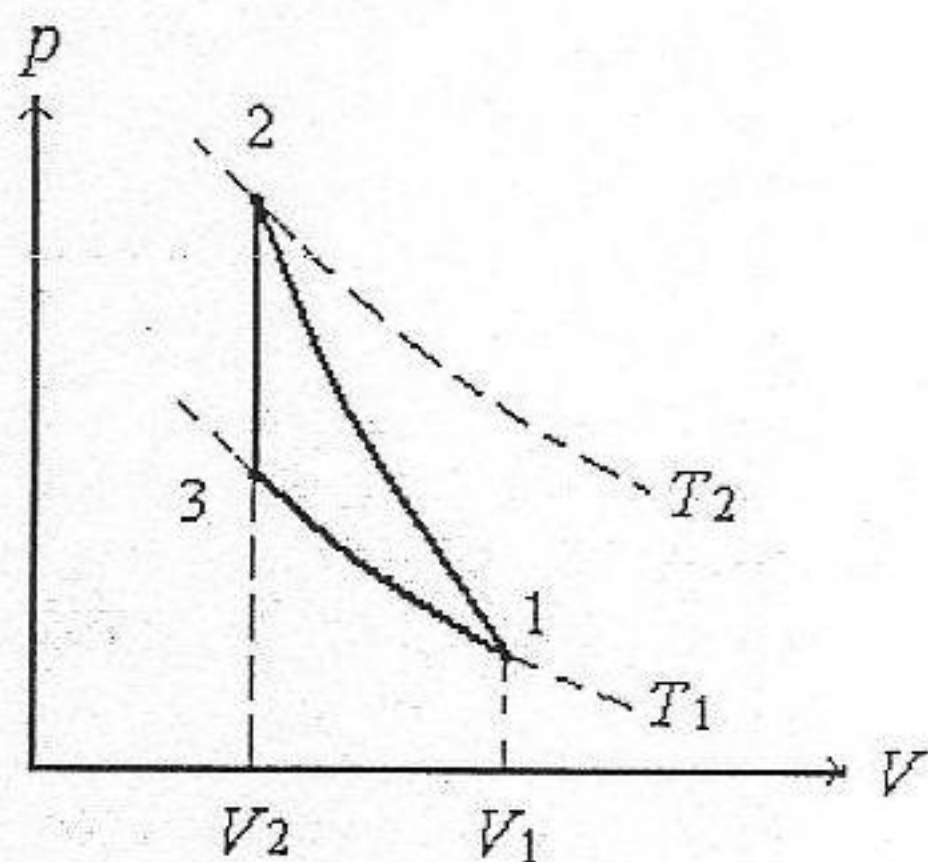
(注: 每题: 30 分, 总分: 150 分)

科目名称:

热力学与统计物理

一, 一理想气体经历下列循环过程: (1) 经多方过程 $pV^n = C$ 由体积 V_1 变到 $V_2 = \frac{V_1}{b}$; (2) 体积不变, 冷却到原来的温度; (3) 等温膨胀到原来的体积, (见下图), 计算该气体在循环过程中所作的功与压缩过程中作的功之比。(答案中只出现 n 和 b)

[提示: 在状态 1 处, 既满足 $p_1 V_1^n = C$, 又满足 $p_1 V_1 = NRT_1$]



解: $1 \rightarrow 2$ 为多方过程, 此压缩过程中作的功为:

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{C}{V^n} \cdot dV = C \cdot \frac{V^{1-n}}{1-n} \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{C}{1-n} \cdot (V_2^{1-n} - V_1^{1-n}),$$

因 $V_2 = \frac{V_1}{b}$, 代入上式:

$$W_1 = \frac{C}{1-n} \cdot (V_2^{1-n} - V_1^{1-n}) = \frac{C}{1-n} \cdot \frac{V_1^{1-n}}{b^{1-n}} \cdot (1 - b^{1-n}),$$

用 $pV^n = C$, 则: $p_1 V_1^n = C$, 代入上式:

$$W_1 = \frac{C}{1-n} \cdot \frac{V_1^{1-n}}{b^{1-n}} \cdot (1 - b^{1-n}) = \frac{p_1 V_1^n}{1-n} \cdot \frac{V_1^{1-n}}{b^{1-n}} \cdot (1 - b^{1-n}) = \frac{p_1 V_1}{1-n} \cdot \frac{1 - b^{1-n}}{b^{1-n}}.$$

$2 \rightarrow 3$ 为等容过程, $W_2 = 0$ 。

$3 \rightarrow 1$ 为等温膨胀过程作的功为: $W_3 = \int_{V_2}^{V_1} p dV = NRT_1 \int_{V_1/b}^{V_1} \frac{dV}{V} = NRT_1 \cdot \ln b = p_1 V_1 \cdot \ln b$

科目名称:

共 页 第 页

气体在循环过程中所作的功为：

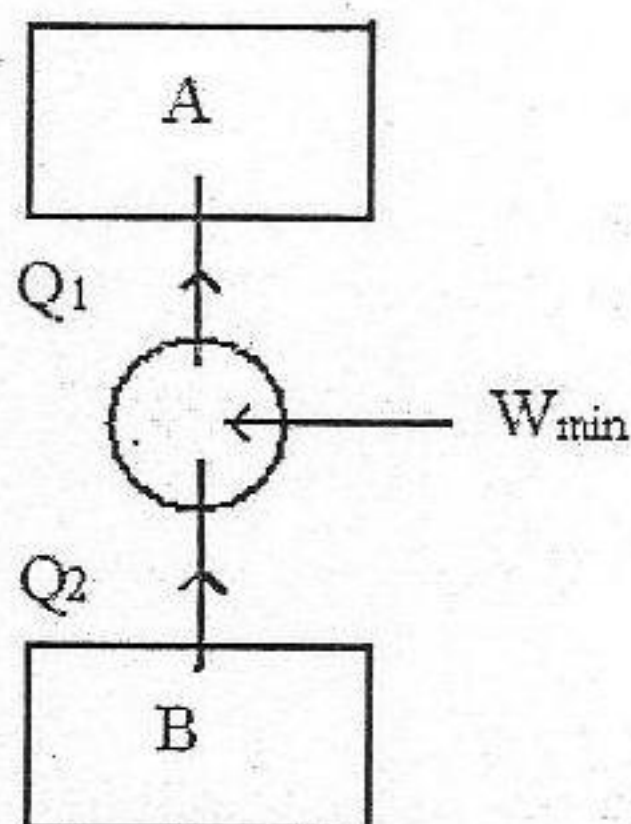
$$W = W_1 + W_2 + W_3,$$

故气体在循环过程中所作的功与压缩过程中作的功之比为：

$$\frac{W}{W_1} = 1 + \frac{W_3}{W_1} = 1 + \frac{p_1 V_1 \ln b \cdot (1-n)b^{1-n}}{p_1 V_1 (1-b^{1-n})} = 1 - \frac{(n-1) \ln b}{b^{n-1} - 1}.$$

二，有 A、B 两个物体，热容量均为 C，且与温度无关。开始两物体温度均为 T，现有一致冷机工作于两物体之间，当 B 的温度降至 A 的一半时，求此系统所做的最小功 W_{\min} （见图）。

[提示：先由系统的总熵变为零，求两物体的终温。]



解：要求的是最小功，所以此循环为可逆循环，系统的总熵变为零。先求出 A 和 B 各自的熵变 ΔS_A 和 ΔS_B ，然后用 $\Delta S_A + \Delta S_B = 0$ ，求两物体的终温。

设初态的温度为 T_i ，则初态时 $T_A = T_i = T$ ； $T_B = T_i = T$ ；根据题意则有：

终态时： $T_A = 2T_f$ ； $T_B = T_f$ 。

故：

$$\Delta S_A = \int_T^{2T_f} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{2T_f}{T},$$

$$\Delta S_B = \int_T^{T_f} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{T_f}{T},$$

由 $\Delta S_A + \Delta S_B = 0$ ，得：

$$C \ln \frac{2T_f}{T} + C \ln \frac{T_f}{T} = 0, \quad T_f = \frac{T}{\sqrt{2}},$$

故终态时, $T_A = 2T_f = \sqrt{2}T$; $T_B = T_f = \frac{T}{\sqrt{2}}$ 。

下面求系统所做的最小功 W_{\min} , $W_{\min} + Q_2 = Q_1$,

$$\begin{aligned} W_{\min} &= Q_1 - Q_2 = C(2T_f - T) - C(T - T_f) = CT \left(\sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= CT \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = CT \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right) = 0.12CT \end{aligned}$$

三, 线性谐振子的能谱为 $\varepsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, 当系统温度足够低时, 振子仅占据基态和第一激发态。求振子处于第一激发态与基态的几率之比; 并计算振子的平均能量。(玻尔兹曼分布)

解: (1), 求振子处于第一激发态与基态的几率之比:

配分函数 $z = \sum_n \omega_n e^{-\beta\varepsilon_n}$, 第 n 个能级上的粒子数与粒子总数之比为:

$$P_n = \frac{a_n}{N} = \frac{\omega_n e^{-\beta\varepsilon_n}}{\omega_1 + \omega_2 e^{-\beta\varepsilon_2} + \dots} = \frac{\omega_n e^{-\beta\varepsilon_n}}{z},$$

上式中的 ω_n 为线性谐振子的能级简并度, $\omega_n = 1$

$$\text{故: } P_n = \frac{1}{z} e^{-\beta\varepsilon_n} = \frac{1}{z} e^{-\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega},$$

$$P_0 = \frac{1}{z} e^{-\beta\frac{1}{2}\hbar\omega}; \quad P_1 = \frac{1}{z} e^{-\beta\frac{3}{2}\hbar\omega},$$

$$\frac{P_1}{P_0} = e^{-\beta\hbar\omega}.$$

(2), 计算振子的平均能量:

$$\text{配分函数 } z = \sum_n \omega_n e^{-\beta\varepsilon_n} = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} + e^{-\frac{3}{2}\beta\hbar\omega} = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} (1 + e^{-\beta\hbar\omega}),$$

$$\ln z = \ln \left(e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} \right) + \ln(1 + e^{-\beta\hbar\omega}) = -\frac{1}{2}\beta\hbar\omega + \ln(1 + e^{-\beta\hbar\omega}),$$

$$\text{振子的平均能量: } \bar{\varepsilon} = \frac{E}{N} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln z = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} + 1}.$$

四, 处于平衡状态的光子气体, 在体积 V 内, 温度为 T , 导出光子总数和能量密度的表达式, 说明它们与温度的依赖关系。(玻色分布)

[提示: 光子气体的化学势 $\mu=0$, 光子的自旋量子数为 1, 自旋在动量方向上的投影可取两个可能值 $\pm\hbar$ (相当于左右偏振)]

$$\left(\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} \cdot dx = 2 \times 1.202 = \text{const.}; \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} \cdot dx = \frac{\pi^4}{15} = \text{const.} \right)$$

解: 由于光子气体中的总光子数不守恒, 故光子气体的化学势 $\mu=0$, 光子的自旋量子数为 1, 自旋在动量方向上的投影可取两个可能值 $\pm\hbar$ (相当于左右偏振), 动量在 $p-p+dp$ 范围内的量子态数为:

$$2 \times \frac{1}{h^3} \int dx dy dz dp_x dp_y dp_z,$$

(坐标变换: $dp_x dp_y dp_z \rightarrow p^2 \sin \theta \cdot dp d\theta d\varphi$),

上式积分为:

$$2 \times \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp,$$

在 $\omega-\omega+d\omega$ 范围内的量子态数为:

$$\frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega,$$

(用 $\varepsilon = cp = \hbar\omega$)

在 $\omega-\omega+d\omega$ 范围内的平均光子数为:

$$\frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1},$$

光子总数为:

$$N = \int_0^{\infty} \frac{V}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{V \cdot k^3}{\pi^2 c^3 \cdot \hbar^3} \cdot T^3 \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} \cdot dx.$$

$$\text{因 } \int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} \cdot dx = 2 \times 1.202 = \text{const.}$$

所以 $N \propto T^3$

在 $\omega-\omega+d\omega$ 范围内的平均光子能量为:

$$\frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \cdot \hbar\omega,$$

总能量为:

$$U = \int_0^{\infty} \frac{V}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} = \frac{V \cdot k^4}{\pi^2 c^3 \cdot \hbar^3} \cdot T^4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} \cdot dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} \cdot dx = \frac{\pi^4}{15} = \text{const.}$$

所以总能量 U 或能量密度 $\frac{U}{V}$ 正比于 T^4 。

五, 由 N 个自由电子组成的二维电子气处在面积 S 内, 求: (1) 在能量范围 $\varepsilon - \varepsilon + d\varepsilon$ 内的量子态数; (2) $T=0K$ 时的费米能量 ε_F ; (3) $T=0K$ 时, 每个电子的平均能量 $\bar{\varepsilon}$ 。(费米分布)

解: (1) 在能量范围 $\varepsilon - \varepsilon + d\varepsilon$ 内的量子态数:

对二维体系, 动量在 $p - p + dp$ 范围内的量子态数为:

$$(2s+1) \frac{1}{h^2} \int dx dy dp_x dp_y, \quad (\text{对电子: } s = \frac{1}{2})$$

$$(2s+1) \frac{1}{h^2} \int dx dy dp_x dp_y = 2 \times \frac{2\pi S}{h^2} p dp = \frac{4\pi S}{h^2} p dp, \quad (\text{积分变换到极坐标})$$

用 $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ 代入, 得在能量范围 $\varepsilon - \varepsilon + d\varepsilon$ 内的量子态数:

$$\Omega(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4\pi m S}{h^2} d\varepsilon, \quad \text{其中 } \Omega(\varepsilon) \text{ 为态密度。}$$

(2) $T=0K$ 时的费米能量 ε_F :

求 $T=0K$ 时的粒子总数 N , 得费米能量 ε_F ,

$$N = \int_0^{\infty} f(\varepsilon) \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_F} \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4\pi m S}{h^2} \varepsilon_F,$$

$$\varepsilon_F = \frac{N h^2}{4\pi m S}.$$

(3) 每个电子的平均能量 $\bar{\varepsilon}$:

先求系统的总能量 \bar{E} , 则 $\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{E}}{N}$ 。

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} \varepsilon \cdot f(\varepsilon) \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon \cdot \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4\pi m S}{h^2} \times \frac{1}{2} \varepsilon_F^2, \quad T=0K \text{ 时,}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{E}}{N} = \frac{1}{2} \varepsilon_F.$$