2002年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等数学

适用专业：地质专业

所有试题答案写在答题本上，答案写在试卷上无效

填空（每小题满分3分，共15分）

（1）设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1)$，则 $f(\log_{\frac{1}{2}} x)$ 的定义域为________.

（2）曲线 $y-1+xe^{y}=0$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

（3）$d[\int_{x^2}^{0} x\sin(t-x^2)dt]=$________.

（4）设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\ln x}{x}$，则 $\int xf'(x)dx=$________

（5）微分方程 $y'-y=xe^{x}$ 的通解形式为________.

一．选择题（以下各小题答案只一个，每小题满分3分，共15分）

（1）设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）。

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

(B) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，但 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续

(C) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，，但不可导

(D) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且可导

（2）设 $f(x)=\int_0^{2x}\frac{\sin t}{t}dt$，$g(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）.

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　　　(D) 同阶但非等价无穷小

（3）设 $I = t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dx, (s>0, t>0)$，则 I 的值（　　）.

（A） 依赖于 s,t　　　（B）依赖于 s，不依赖于 t

（C）依赖于 t，不依赖于 s　　　（D）依赖于 s,t,x

（4）设 $\int f(x)dx = xe^x - e^x + C$，则 $\int f'(x)dx =$（　　）.

(A) $xe^x - e^x + C$　　　（B） $xe^x + C$

（C） $xe^x + e^x + C$　　　（D） $xe^x - 2e^x + C$

（5）设 $f(x)$ 是 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$ 且 $f'(x_0)=0$ 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处（　　）.

(A)取极大值　　　(B) 取极小值

(C) 某邻域内单调增加　　　(D) 某邻域内单调减少

三、（本题满 6 分）

求 $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$

四、（本题满 7 分）

设函数 $f(x) = \lim\limits_{t \to x} \left(\frac{\tan t}{\tan x}\right)^{\frac{x}{\tan t - \tan x}}$，试讨论 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型。

五、（本题满 6 分）

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x \geq 0$ 时，$f(x)\cdot F(x) = \frac{1}{2}xe^x$，已知 $F(1)=1$，$F(x)>0$，试求 $f(x)$。

六、　（本题满 6 分）

已知 $y=y(x)$ 由方程 $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\arctan\frac{y}{x}}$ 所确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

七.（满分7分）

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$，求

$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$。

八.（满分6分）

设 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}$，求 $f^{(n)}(x)$。

九.（满分8分）

已知 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\le x\le 1} f(x)=-1$，证明：

$\max\limits_{0\le x\le 1} f''(x)\ge 8$。

十.（满分8分）。

设 xoy 平面上有正方形 $D=\{(x,y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ 及直线

$l:x+y=t\ (t\ge 0)$。若 $s(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，求 $\int_0^x s(t)dt$。

十一.（满分8分）

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=4$，对

$\forall\ x,y\in(0,+\infty)$ 恒有 $f(xy)=xf(y)+yf(x)$，求 $f(x)$。

十二.（满分8分）

过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\ (x\ge 0)$ 上点 A 作切线，使该切线与曲线及 x 轴所围平面图形 D 的面积

为 $S=\dfrac{3}{4}$

（1） 求点 A 的坐标；

（2） 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。