# 中国地质大学（北京）
# 2004年硕士研究生入学考试试题

试题名称：高等数学 试题代码：310

注意：答案一律写在答题纸上，写在本试题上无效！！！

## 一、填空题（共5小题，每小题3分，共15分）

1. 若 $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^4 \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^n y}{dx^n}\right|_{t=1} =$ ______ $4^n$

2. 设 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right]}{3^x - 1} = 5$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} =$ ______ $10\ln 3$

3. 函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{20+x^2}{8}, & 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{x^2+2}{x}, & 2 < x < +\infty \end{cases}$ 在 $[0, 4]$ 上满足 ______ 中值定理，且其中值 $\xi =$ ______

4. 函数 $y = y(x)$ 满足 $\Delta y = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}\Delta x + o(\Delta x)$，且 $y(0) = 0$，则 $\int_0^1 y(x)\,dx =$ ______ $\frac{\pi}{8}$

5. 方程 $y''\cos x - 2y'\sin x + 3y\cos x = e^x$ 的通解为 ______

## 二、选择题（共5小题，每小题3分，共15分）

1. 设 $f(x)$ 是偶函数且恒为正，$g(x)$ 是奇函数，则以下函数为偶函数的是（ ）。

(A)、$\dfrac{xg(x)}{f(x)}$； (B)、$f(x) - g(x)$； (C)、$f(x)\cdot g(x)$； (D)、$xf[g(x)]$。

2. 设对任意 $x$，总有 $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$（ D ）。

(A)、存在且等于零； (B)、存在但不一定为零；

(C)、一定不存在； (D)、不一定存在。

3. 设函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为（ ）

(A)、不存在间断点； (B)、存在间断点 $x = 1$；

(C)、存在间断点 $x = 0$； (D)、存在间断点 $x = -1$。

4. 设 $k > 0$，则方程 $x^3 - 3x^2 - 2k = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的实根个数为（ C ）。

(A)、3； (B)、2； (C)、1； (D)、0。

5. 方程 $y'' - 4y' - 5y = e^{-x} + \sin 5x$ 的特解形式为（ ）。

(A)、$Ae^{-x} + B\sin 5x$； (B)、$Ae^{-x} + B\cos 5x + C\sin 5x$；

(C)、$Axe^{-x} + B\sin 5x$； (D)、$Axe^{-x} + B\cos 5x + C\sin 5x$。

三、计算题（共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{x(1-\cos x)}$. $=\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{6}$

2. 求 $\begin{cases} x+t(1-t) &=0 \\ te^y+y+1 &=0\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程. $-\frac{1}{e}$ $-\frac{1}{e}$

3. 求不定积分 $\int\dfrac{x^2}{(x-1)^{2004}}dx$. $\int\left[\frac{1}{(x-1)^{2002}}+\frac{2}{(x-1)^{2003}}+\frac{1}{(x-1)^{2004}}\right]dx$.

4. 设 $a_1=\sqrt{6}$, $a_n=\sqrt{6+a_{n-1}}$, 求极限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ $=A$ $A=\sqrt{6+A}$ $A=3$.

5. 计算定积分 $\int_0^1 t|t-x|\,dt$. $x\le 1$ $0<x<1$ $x>1$.

6. $k$ 取何值时，函数

$$f(x)=\int_0^x\left(\frac{k}{4}\cos t+\frac{1}{k^2}\cos 3t\right)dt$$

在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取极值，是取极大值还是取极小值? $k=2$. 极大值

7. 有一形状为 $z=x^2+y^2$ 的容器，原来盛有 $8\pi$ 立方米的水，后来又倒入了 $64\pi$ 立方米的水，试求水面比原来升高了多少米? $8$.

8. 设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

$p(x)=\left(\frac{x}{e^x}-x\right)$ $y=-e^{e^{-x}+x-\frac{1}{2}}+e^x$

四、(10 分)已知函数

$$f(x)=\begin{cases} x+4\ln(1+x), & x\ge 1, \\ ax^2+bx+c, & x<1\end{cases}$$

在点 $x=1$ 处有二阶导数，试确定参数 $a$、$b$、$c$ 之值.

五、(12 分)设 $f''(x)\le 0$, $x\in[0,1]$, $n$ 为正整数，证明:

$$\int_0^1 f(x^n)\,dx\le f\left(\frac{1}{n+1}\right)(1-0)$$

六、(8 分)一容器的内表面是由曲线 $x=y+\sin y\ \left(0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$ 绕 $y$ 轴旋转所得的旋转面. 现以 $\pi\, m^3/s$ 的速率往该容器内注水，求当液体面高度为 $\frac{\pi}{4}m$ 时液面上升的速度.

七、(12 分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数，且 $|f''(x)|\le M$, $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值，证明:

$$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma.$$

$\because f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值 则 $\exists c\in(0,a)$ $f'(c)=0$.

由拉氏定理知: $\exists\xi_1\in[0,c]$ $\frac{f'(c)-f'(0)}{c}=f''(\xi_1)\Rightarrow -f'(0)=cf''(\xi_1)$

$\exists\xi_2\in[c,a]$ $\frac{f'(a)-f'(c)}{a-c}=f''(\xi_2)\Rightarrow f'(a)=(a-c)f''(\xi_2)$

$\because|f''(x)|\le M$ 故 $|f'(0)|=c|f''(\xi_1)|\le Mc$ $\le M(a-c)$ $\Rightarrow$ ①+②: $|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$.

八、(8 分)设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续，且

$$f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

求函数 $f(x)$.

$f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x}$

九、(10 分)求微分方程 $y'' - 2y' + \lambda y = xe^{ax}$ 的通解，其中 $\lambda$、$a$ 为任意常数

十、(12 分)若曲线 $y = \cos x\ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴所围成的图形的面积被两正弦曲线 $y = a\sin x$，$y = b\sin x\ (a > b > 0)$ 三等分（见下图），试确定 $a$、$b$ 之值，

$a = \frac{6}{3}$ $b = \frac{5}{12}$