2004年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等数学

适用专业：

所有试题答案写在答题本上，答案写在试卷上无效

一、填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分.）

（1）设二次曲线 $y = ax^2 + bx + c(0 < x < 1)$，将两条曲线

$$L_1 : y = e^x(-\infty < x \le 0), L_2 : y = \frac{1}{x}(1 \le x < +\infty)$$

连接成处处有切线的曲线,则 $a =$ ______, $b =$ ______, $c =$ ______.

（2）设 $\int \frac{\sin x}{f(x)} dx = \arctan(\cos x) + C$，则 $\int f(x) dx =$ ______.

（3）设曲线 $y = f(x)$ 由 $x = \int_1^t \frac{\cos u}{u} du$ 及 $y = \int_1^t \frac{\sin u}{u} du$ 确定,则该曲线当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时的切线斜率等于______,此曲线介于 $t = 1$ 与 $t = \frac{e}{2}$ 之间的弧长为______.

（4）设 $f(x) = \sin x$，则 $f'(\sin x) =$ ______.

（5）当 $a =$ ______时,极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^a} \int_0^{x^2} \sqrt{1 + t^4} dt$ 存在且不为零,此极限值为______.

（6）微分方程 $y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解是______.

二、选择题（本题共6小题，每小题4分，满分24分.每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.）

（1）设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处（　　）.

（A）不连续.　　（B）连续但不可导.

（C）没定义.　　（D）导函数连续.

（2）当 $x \to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限（　　）.

（A）等于2.　　　　（B）等于0.

（C）为无穷大.　　　　（D）不存在但不是无穷大.

（3）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且无零点，

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt,$$

则方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内根的个数恰为（　　）.

（A）0.　　　　（B）1.

（C）2.　　　　（D）3.

（4）设 $f(x)$ 为已知单调可导函数，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，则 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{f(x)}\frac{g(t)}{t}\sin t\,dt=$（　　）.

（A）$\dfrac{f(x)}{x}\sin(f(x))f'(x)$.　　　　（B）$\dfrac{x}{f(x)}\sin(f(x))$.

（C）$\dfrac{x}{f(x)}\sin(f(x))f'(x)$.　　　　（D）$\dfrac{x\sin x}{f(x)}f'(x)$.

（5）设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$，则（　　）.

（A）$I_1>I_2$.　　　　（B）$I_1<I_2$.

（C）$I_1=I_2$.　　　　（D）不能确定.

（6）设 $f(x)$ 有三阶连续导数，且 $f'(0)=f''(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'''(x)}{|x|}=2$，则（　　）.

（A）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.　　　　（B）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

（C）$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

三、计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分。）

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{1-\sqrt{x}}+\left(\dfrac{7+x}{9+x}\right)^{\frac{x-1}{3}}\right]$.

（2）设函数 $f(x)$ 可导，$y=\sqrt{1+\sin^2[f(x)]+(\cos x)^x}$，求 dy.

（3）求积分 $\int\dfrac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

（4）求曲线 $\begin{cases}x+t(1-t)=0\\ te^y+y+1=0\end{cases}$，当 $t=0$ 时的法线方程.

（5）设 $f(x)+\sin^4 x=\int_0^{\frac{x}{2}}f(2t)dt$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

四、（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

五、（本题满分 12 分）

设 $x_n=\dfrac{1}{n}\ln\left[\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)\left(1+\dfrac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n\pi}{n}\right)\right]$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

六、（本题满分 12 分）

函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，设对任意 $x>0$，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$，求 $f(x)$ 的一般表达式.

七、（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,2)$ 内具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f(1)=0$，试证在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

八.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在区间 $(0,1)$ 内 $f(x)>0$，且 $xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$，又由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1, y=0$ 围成平面图形的面积为 2，求函数 $y=f(x)$，问 a 为何值，此平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小.

九.（本题满分 12 分）

证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x=1$（$n\ge2$ 的正整数）在区间 $(0,1)$ 内必有唯一根 x_n，并求数列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.