

北京化工大学

2005 年攻读硕士学位研究生入学考试

量子力学 试题

注意事项

1. 答案必须写在答题纸上, 写在试卷上均不给分。
2. 答题时可以用不用抄题, 但必须写清楚题号。
3. 答题必须用蓝、黑墨水笔或者圆珠笔, 用红色笔或者铅笔均不给分。

一: 概念解释 (本部分共计 30 分, 每个概念 6 分)。

1. 波函数
2. 简并
3. 算符
4. 力学量完全集
5. 电子的自旋

二: 简述题 (本部分共两小题, 共计 20 分, 每小题 10 分)

1. 简单论述两个算符对易的物理意义。
2. 简述态叠加原理的内容, 并且简单论述此原理对于构造描述微观粒子的动力学方程的限制。

三: 证明题 (本部分共三小题, 共计 40 分)。

1. 证明 (15 分): 对于单粒子, 在全空间找到它的几率总和不随时间改变, 即

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) d^3x = 0$$

2. 证明 (15 分): 厄密算符的本征值为实数, 并且属于不同本征值的本征函数彼此正交。

3. 证明 (10 分): 处于一定状态 $\psi(x, t)$ 下的体系, 力学量 \hat{F} (假设其不显含时间) 的平均值 $\bar{F} = (\psi(x, t), \hat{F}\psi(x, t))$ 随时间的演化规律为

$$\frac{d}{dt} \bar{F} = \frac{1}{i\hbar} (\psi(x, t), [\hat{F}, \hat{H}]\psi(x, t))$$

其中 \hat{H} 为系统的哈密顿算符。

- 四：计算题（本部分共三小题，共计 60 分，每小题 20 分）
1. 一粒子在二维无限深的方势阱

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in [0, a], y \in [0, b], \\ \infty, & x \notin [0, a], y \notin [0, b] \end{cases}$$

中运动，计算其能量的本征值和本征函数。

2. 设在一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, a], \\ \infty, & x \notin [0, a] \end{cases}$$

中运动，求其能量的本征值和本征函数。若粒子的运动状态用

$$\psi(x) = \frac{4}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a}$$

描述，求粒子能量的可能测量值及其相应的几率。

3. 已知一维线性谐振子的哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2$$

其能级为

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), n = 0, 1, \dots$$

对应的本征函数为：

$$\varphi_n = N_n \exp(-\frac{\xi^2}{2}) H_n(\xi)$$

其中

$$N_n = (\frac{\alpha}{\pi^{1/2} 2^n n!})^{1/2}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad \xi = \alpha x$$

现在假设此谐振子带电荷 e ，并且将此谐振子放入弱电场 E 中，电场沿 x 轴正向。此时的哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2 \hat{x}^2 - eE\hat{x}$$

- a. 请用微扰法 (E 较小) 求体系的定态能量和波函数（能级精确到二级，波函数到一级）。
- b. 求此问题的精确解。
- 厄密函数的性质：

$$\xi H_n(\xi) = \frac{1}{2} H_{n+1}(\xi) + n H_{n-1}(\xi)$$