B

北京化工大学

2006 年攻读硕士学位研究生入学考试

高等数学　试题

注意事项

1. 答案必须写在答题纸上，写在试卷上均不给分。
2. 答题时可不抄题，但必须写清题号。
3. 答题必须用蓝、黑墨水笔或圆珠笔，用红色笔或铅笔均不给分。

一、填空题（每题 4 分，共 24 分）

（1）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a+x}{1+x^{2n}}$，则当常数 $a=$ __1__，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

（2）曲线 $y=\dfrac{1}{x}\arctan\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ 有水平和铅直渐近线共__2__条.

（3）$\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$ __$\frac{\pi}{3}$__.

（4）设 $\begin{cases}x=f(\cos 3t)\\ y=f(t-\dfrac{\pi}{2})\end{cases}$，其中 $f(x)$ 可导，且 $f'(0)\neq 0$，则

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=$ __3__.

（5）微分方程 $e^x dy+(ye^x-2x)dx=0$ 的通解为________.

（6）设矩阵 $A=(1,\ 2,\ 3)$，$B=(1,\ 1,\ 1)$，则 $(A^TB)^k=$ __$6^{k-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$__.

二、选择题（每题 4 分，共 32 分）

（7）设 $f(x+1)=f(x)$ 总成立，且 $f'(0)=b$（b 为非零常数），

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处

（A）不可导； （B）可导且 $f'(1)=1$；

（C）可导且 $f'(1)=0$； （D）可导且 $f'(1)=b$.

（8）函数 $y=f(x)$ 当 $x\neq x_0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x-x_0}}$，则 $f(x)$ 在

（A）x_0 处不连续； （B）x_0 处无极值；

（C）x_0 处取得极小值； （D）x_0 处取得极大值.

（9）设 $M=\int_0^1(e^x-1)dx,\quad N=\int_0^1 xdx,\quad P=\int_0^1\ln(1+x)dx,$ 则有

(A) $N<P<M$； (B) $M<N<P$；

(C) $P<N<M$； (D) $P<M<N$.

（10）设 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上连续的奇函数，$\varphi(x)=(x-b)\int_{-a}^{x}f(t)dt$

，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)$ 等于

（A）1； （B）0； （C）$\dfrac{1}{2}$； （D）2.

（11）设 $u=arc\cot\dfrac{y}{x}$，则有

(A) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$； (B) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$；

(C) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$； (D) $\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

（12）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y\sin x-y+1=0$ 所确定，则

曲线 $y=y(x)$ 在 $x=\pi$ 处的切线与 y 轴交点的纵坐标是

(A) $\pi e+1$； (B) $-\pi e+1$；

(C) $-\pi e-1$;　　　　(D) $\pi e-1$;

(13) A 为 n 阶矩阵，λ_1,λ_2 是 A 的特征值，α_1,α_2 是 A 分别对应 λ_1,λ_2 的特征向量，则（　）

(A) $\lambda_1=\lambda_2$ 时，α_1,α_2 一定成比例；

(B) $\lambda_1=\lambda_2$ 时，α_1,α_2 一定不成比例；

(C) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，α_1,α_2 一定成比例；

(D) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，α_1,α_2 一定不成比例.

(14) 设 A 是 n 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $\left||A|A^*\right|=$（　）

(A) $|A|^2$；　(B) $|A|^n$；　(C) $|A|^{2n}$；　(D) $|A|^{2n-1}$.

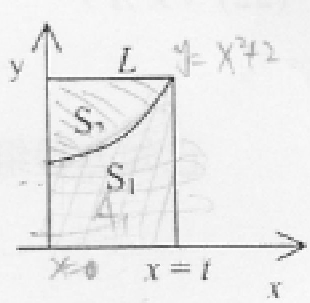
三、解答题 (解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

（15）（12 分）

设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{\int_0^x (x-t)f(t)dt}$.

（16）（12 分）

曲线 $y=x^2+2$ 与直线 $x=0$, $x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形 S_1，设其面积为 A_1.过 $x=t$ 与 $y=x^2+2$ 的交点，作一平行于 x 轴的直线 L，设 L 与 $y=x^2+2$ 及 $x=0$ 所围图形的面积为 A₂，已知 $A_1=\dfrac{7}{2}A_2$，



（1） 试确定 t;

（2） 求 S_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

（17）（12 分）

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，$F(0)=2$，若当 $0\le x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有

$f(x)\cdot F(x)=\dfrac{2\tan x}{\cos x}$，试求 $f(x)$.

（18）（10 分）

已知 $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+3y^2-9x$，求：

（1） $f(x,y)$ 的极值点及极值；

（2） $f(x,y)$ 在适合附加条件，$x-y+3=0(-2\le x\le 1)$ 下的最小值.

（19）（12 分）

用变量代换 $x=e^t$ 化简微分方程 $x^2y''+xy'-4y=3x$，并求满足 $y|_{x=1}=1$，$y'|_{x=1}=-1$ 的特解.

（20）（9 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D |x-y|d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

（21）（9 分）

已知 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)-2f(\xi)=0$.

(22)（9 分）

已知方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3 \\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5 \end{cases}$

（1）当a, b分别为何值时方程组无解？

（2）当a, b分别为何值时方程组有惟一解，并求出该解。

（3）当a, b分别为何值时方程组有无穷多解？求出方程组的通解.

(23)（9分）

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x\end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$相似,

（1）求x；

（2）求一个满足$P^{-1}AP=B$的可逆矩阵P.