

No: 613-1

北 京 科 技 大 学

2008 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 613 试题名称: 数学分析 (共 2 页)

适用专业: 应用数学、计算数学、运筹学与控制论、基础数学、概率论与数理统计

说明: 所有答案必须写在答题纸上, 做在试题或草稿纸上无效。

一、(20 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上三次可微, 证明存在实数 $\xi \in (-1, 1)$, 使得

$$\frac{f'''(\xi)}{6} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0).$$

二、(15 分) 设 $x > 0$, 则 $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$.

三、(10 分) 设 $f(x) = \int_0^x \sin^n t dt$, 求证: 当 n 为奇数时, $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数; 当 n 为偶数时 $f(x)$ 是一线性函数与一以 2π 为周期的周期函数之和.

四、(15 分) 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n > 0, (n \geq 2)$ 且 $f(x) = \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

五、(20 分) 设 $f(x)$ 为一阶连续可微函数, 且 $f'(0)$ 存在, $f(0) = 0$, 定义

$$g(x) = \begin{cases} f'(0) & x = 0 \\ \frac{1}{x} f(x) & x \neq 0 \end{cases}$$

证明: 函数 $g(x)$ 可微, 且 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

六、(15 分) 证明 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上

1) 一致收敛 2) 绝对收敛 3) 但由其各项绝对值组成的级数在 $[0, 1]$ 上却不一致收敛.

七、(15 分) 试求函数 $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$, $x > 0, y > 0, z > 0$ 在条件 $xyz = a^3$ 下的最小值.

NO: 613-2

八、(15 分) 讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点(0,0)处的连续性、可微性.

九、(10 分) 计算 $\int_{\widehat{AB}} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, 其中 m 为常数, \widehat{AB} 为由 $(a,0)$ 到 $(0,0)$ 经过圆 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 上半部的路线.

十、(15 分) 计算二重积分 $I = \iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$, 其中 D 是由 $x+y=1, x=0$ 及 $y=0$ 所围成的区域.