№: 876-1

北 京 科 技 大 学
2008年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 876　　试题名称: 量子力学　　（共 2 页）

适用专业: 凝聚态物理、理论物理

说明: 所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

物理常数：光速：$c=2.998\times10^{8}m\cdot s^{-1}$；普朗克常数：$h=6.626\times10^{-34}J\cdot s$；电子质量：$m_e=9.109\times10^{-31}kg$；电子电荷：$e=1.602\times10^{-19}C$；泡利矩阵：$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$，$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$\hat{1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

1. 黑体辐射（30 分）：假设恒星可按绝对黑体处理，估算恒星表面温度为多少时，恒星发出的辐射可使其周围的氢电离。（维恩位移定律：$\lambda_{\max}T=2.9\times10^{-3}\mathrm{m\cdot K}$，氢原子第一电离能：13.6eV）

2. 角动量（30 分）：对于(L^2,L_z)的共同本征态$|l,m\rangle$，(i) 计算$\langle L_x\rangle=?$，$\langle L_y\rangle=?$，$\langle L_x^2\rangle=?$，$\langle L_y^2\rangle=?$；(ii) 验证不确定关系：$\sqrt{\langle(\Delta L_x)^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta L_y)^2\rangle}\ge\frac{1}{2}\left|\langle[L_x,L_y]\rangle\right|$。

3. 泡利矩阵（30 分）：单位向量$\hat{n}$位于 x-z 平面上与 z 轴成θ角，(i) 求：$\sigma_n=\sigma\cdot\hat{n}$的本征值及本征函数（取$\sigma_z$表象）。(ii) 对自旋向上的态$\chi_+(\sigma_z=1)$，求$\sigma_n$的可能测量值及相应概率。

4. 占有数表象（30 分）：假设a,b是两种湮灭算符，都满足玻色型对易关系：$[a,a^+]=1$，$[b,b^+]=1$，a,b之间无耦合，即：$[a,b]=[a,b^+]=[b,a^+]=0$。(i) 定义：$S^+=\hbar a^+b$，$S^-=\hbar b^+a$，$S_z=\frac{\hbar}{2}(a^+a-b^+b)$；求证：$[S_z,S^\pm]=\pm\hbar S^\pm$，$[S^+,S^-]=2\hbar S_z$。(ii) 定义算符：$N=a^+a+b^+b$，求证：$S^2=S_z^2+\frac{1}{2}(S^+S^-+S^-S^+)=\frac{\hbar^2}{2}N\left(\frac{N}{2}+1\right)$

5. 三自旋系统（30 分）：考虑三个自旋 1/2 组成的系统，哈密顿为：$H = J\left(S_1 \cdot S_2 + S_2 \cdot S_3 + S_1 \cdot S_3\right)$，$J > 0$。(i) 利用：$S_1 \cdot S_2 + S_2 \cdot S_3 + S_1 \cdot S_3 = \dfrac{\left(S_1 + S_2 + S_3\right)^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2}{2}$，求三自旋系统的能级和简并度；(ii) 假设三自旋系统中 1、2 两个自旋组成自旋单态，第 3 个自旋向上或向下；波函数可表示为：$|\psi_1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right)|+\rangle_3$，$|\psi_2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right)|-\rangle_3$；定义总自旋：$S_{tot} = S_1 + S_2 + S_3$，求：$\langle\psi_1|S_{tot}^2|\psi_1\rangle = ?$，$\langle\psi_2|S_{tot}^2|\psi_2\rangle = ?$，$\langle\psi_1|S_{tot}^z|\psi_1\rangle = ?$，$\langle\psi_2|S_{tot}^z|\psi_2\rangle = ?$，$\langle\psi_1|H|\psi_1\rangle = ?$，$\langle\psi_2|H|\psi_2\rangle = ?$