北 京 科 技 大 学

2009年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号： 613 试题名称： 数学分析 （共 1 页）

适用专业： 数学

说明： 所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

一、(15分)设$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上二阶可导，且$f(a)>0, f'(a)<0$，而当$x>a$时，$f''(x)\le 0$，证明：在$(a,+\infty)$内，方程$f(x)=0$有且仅有一个实根.

二、(15分) 设$f(x)$有连续的二阶导数，$f(0)=f'(0)=0$，且$f''(x)>0$，求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$，其中$u(x)$是曲线 $y=f(x)$ 在点$(x,f(x)$处的切线在x轴上的截距.

三、(15分)函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，证明$F(x)$可导，且$F'(x)=f(x)$.

四、(15分)设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，证明：

$$\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \frac{\pi}{2t}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}x,\ (t>0).$$

五、(15分) 用有限覆盖定理证明根的存在性定理.

六、(15分) 计算二重积分$\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$，其中$D$是由$x=0, y=0, x+y=1$所围成的区域.

七、(15分) 讨论函数序列$\left\{f_n(x)=n^2xe^{-n^2x^2}\right\}, x\in[0,1]$的一致收敛性.

八、(15分) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n-3^{2n}}$的收敛半径和收敛区域.

九、(15分) 求$\int_L \dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$，其中$L$为$y=1-2x^2$自点$A(-1,-1)$至点$B(1,-1)$的弧段.

十、(15分) 证明：$5e^{\frac{-9}{2}} \le \int_c e^{-\sqrt{x^3y}}ds \le 5$，其中$c$是直线$3x+4y-12=0$介于两坐标轴之间的线段.

证明：$5e^{\frac{-9}{2}} \le \int_c e^{-\sqrt{x^3y}}ds \le 5$.