北 京 科 技 大 学
2009年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 610　　　试题名称: 单考数学　　　（共 2 页）

适用专业: 全校各专业

说明: 所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

一、单选题(本题共10小题，每小题4分，满分40分)

(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 在点 $x=1$ 处可导，则 (　)

(A) $a=2,b=1.$　(B) $a=2,b=-1.$

(C) $a=-2,b=-1.$　(D) $a=-2,b=1.$

(2) 函数 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \qquad x=0, \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处 (　)

(A))不连续.　(B)连续但不可导.　(C)可导.　(D)无法判定.

(3) 设 $f(-x)=f(x)$，且在 $(0,+\infty)$ 内，$f'(x)<0$，$f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内 (　)

(A)单调减少且向上凹. (B)单调减少且向上凸.

(C)单调增加且向上凹. (D)单调增加且向上凸.

(4) 当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ 是 (　)

(A)无穷小. (B)有界的,但不是无穷小. (C)无穷大. (D)无界的,但不是无穷大.

(5) $x=0$ 是函数 $f(x)=\sin x\sin(\dfrac{1}{x})$ 的 (　)

(A)可去间断点. (B)跳跃间断点. (C)无穷间断点. (D)震荡间断点.

(6) 设函数 $g(x)$ 可导，$h(x)=e^{1+g(x)},h'(1)=1,g'(1)=2,$ 则 $g(1)=$ (　)

$(A)-\ln 2-1$. (B) $-\ln 3-1$. (C) $\ln 3-1$. (D) $\ln 2-1$.

(7) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$ (　)

(A) 0.　(B) 6.　(C) 36.　(D) $+\infty$.

(8) $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 (　)

(A) $\dfrac{\ln^2 2}{n}$.　(B) $\dfrac{\ln^2 2}{n!}$.　(C) $\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$.　(D) $\dfrac{(\ln 2)^{n-1}}{n!}$.

(9) 若 $\lim\limits_{x\leftarrow 0}\dfrac{\varphi(x)}{\tan x}=1$，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\varphi(x)$ 与下列函数等价的是 (　)

(A) $\ln(1-x)$.　(B) $\sin|x|$.　(C) $1-\cos\sqrt{x}$.　(D) $\sqrt{1+2x}-1$.

(10) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$ 等于 ( )

(A) $\int_0^1 dy\int_{\pi+\sin x}^{\pi}f(x,y)dx$.　(B) $\int_0^1 dy\int_{\pi-\sin x}^{\pi}f(x,y)dx$.

(C) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin x}f(x,y)dx$.　(D) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin x}f(x,y)dx$.

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分)

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=$______.

(12) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^5+\sin^2 x)\cos^2 xdx=$________.

(13) $f'(e^x)=1+x$, $f(1)=0$,则 $f(x)=$_________.

(14) 设 $y=f(x^2+e^{-x})$，其中 f 可导，且 $f'(1)=-1$，则 $y'(0)$ =______.

(15) 设 Ω 是半径为 1，高为 2 的圆柱体，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=$________.

(16) 设 L 为圆周 $x=\cos t, y=\sin t(0\le t\le 2\pi)$，则 $\oint_L(x^2+y^2)^n ds=$________.

三、解答题((17～24 题，共 86 分，解答应写出文字说明、证明步骤和演算过程)

(17) (本题满分 11 分) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

(18) (本题满分 11 分) 设 $z=f(xy^2,x^2y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(19) (本题满分 11 分) 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的和函数.

(20) (本题满分 11 分) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，$z=f(e^x\sin y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$，求 $f(u)$.

(21) (本题满分11分) 设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2, x<1\\0, x>1\end{cases}$，求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$，使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足所给方程，且满足条件 $y(0)=0$.

(22) (本题满分11分) 证明曲线积分

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy,$$

在整个 xoy 面内与路径无关，并计算积分值.

(23) (本题满分 10 分) 计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}xz^2dydz+(x^2y-z^2)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$，其中 Σ 是上半球体 $x^2+y^2\le a^2$，$0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧.

(24) (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0<a<b$，证明：在 (a,b) 内存在 ξ,η，使 $f'(\xi)=(a^2+ab+b^2)\dfrac{f'(\eta)}{3\eta^2}$.