

# 北京科技大学

## 2012 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 613 试题名称: 数学分析 (共 2 页)

适用专业: 数学, 统计学

说明: 所有答案必须写在答题纸上, 做在试题或草稿纸上无效。

- (20 分) (1) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$ 。  
(2) 证明积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$  收敛且求其值。
- (20 分) (1) 证明: 对于  $\lambda > 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\left(\sqrt{n^2 + \lambda} \pi\right)$  都收敛。  
(2) 设  $f(x)$  连续, 求极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 。
- (15 分) 已知给定函数  $f(x) = \begin{cases} (x-a)^m \sin \frac{1}{x-a}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$  ( $m$  为正整数), 试讨论  $f(x)$  在  $x=a$  的连续性与可导性以及导函数  $f'(x)$  在  $x=a$  的连续性。
- (15 分) 设函数  $f(x)$  在  $[0, b]$  上连续, 且  $\int_0^x f(t) dt \geq bf(x) \geq 0, \forall x \in [0, b]$ , 证明:  $f(x) \equiv 0$ 。
- (15 分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ 。证明: 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使  $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ 。
- (15 分) 已知曲线  $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$ , 求曲线  $C$  距离  $XOY$  面最远的点和最近的点。
- (15 分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续, 在  $(a, b)$  可导, 且  $f'(x) \neq 0$ 。试证明: 存在

$$\xi, \eta \in (a, b), \text{ 使 } \frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} \cdot e^{-\eta}.$$

8. (15 分) 设  $f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上连续且为奇函数, 区域  $D$  由曲线  $y = 4 - x^2$  与

$$y = -3x, x = 1 \text{ 所围成, 求 } I = \iint_D (1 + f(x) \ln(y + \sqrt{1 + y^2})) dx dy.$$

9. (10 分) 试利用闭区间套定理证明数列  $\{a_n\}$  收敛的充要条件是: 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 使得当  $m, n > N$  时,  $|a_m - a_n| < \varepsilon$ .

10. (10 分) (1) 设  $a$  为不是整数的实参数, 计算函数  $\cos ax$  在  $[-\pi, \pi]$  的三角级数展开式;

$$(2) \text{ 证明: } \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right), \quad t \text{ 不是 } \pi \text{ 的整数倍};$$

$$(3) \text{ 利用上面结果计算广义积分: } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$