川 113

北方交通大学一九九八年硕士学位研究生入学考试试题

考试课程：高等代数　　共二页

一.(共23分)完成下列各题

1.(8分)设A是n阶方阵,证明:秩A^n=秩A^{n+1}=秩A^{n+2}=…

2.(5分)设方阵A满足$ax^2+bx+c=0$ $(c\neq 0)$,即有$aA^2+bA+cE=0$,证明:A是可逆方阵,并求其逆阵.

3.(5分)设$f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$是实二次型,若有实n维向量X_1,X_2,使$X_1^TAX_1>0$,$X_2^TAX_2<0$,证明:存在实n维向量$X_0\neq 0$,使$X_0^TAX_0=0$.

4.(5分)设$A(\lambda)$是一个五阶λ-阵,秩为4,初等因子为:$\lambda,\lambda^2,\lambda^2,\lambda-1,\lambda-1,\lambda+1,(\lambda+1)^3$,试求$A(\lambda)$的标准形.

二.(12分)计算下列各n阶行列式

(1)(6分) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

(2)(6分) $$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

三.(8分)设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关,证明:当且仅当n为奇数时,向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$也线性无关.

四.(12分)设有n个未知量n个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

其中,$a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},b_1,a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},b_2,\cdots,a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn},b_n$构成一等差数列.证明:方程组有唯一解当且仅当n=2,公差$d\neq 0$,或n=1,$a_{11}\neq 0$.

五.(9分). 设A是n维线性空间V的线性变换,证明:

A的秩$+$$A$的零度$=n$.

六.(12分) 设$f(t)$和$g(t)$是数域P上互素的多项式,A是数域P上n阶方阵. 证明:齐次线性方程组$f(A)\cdot g(A)X=0$的解子空间V是$f(A)X=0$与$g(A)X=0$各自的解子空间V_1和V_2的直和。这里$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.

七.(12分) 设η是欧氏空间V中一个单位向量,定义$T\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$

证明: (1) T是正交变换(这样的正交变换称为镜面反射);

(2) 当V为有限维空间时,T是第二类的;

(3) 当V为n维欧氏空间,正交变换T有特征值1,且属于特征值1的特征子空间V_1的维数为$n-1$,则T为镜面反射.

八.(12分) 设$A_{n\times n}$为实正定阵,$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,a是实列向量,β为实数,求$f(X)\equiv f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX+2a^TX+\beta$的极值.

[注]: 本试题中符号"T"表示转置(即第一大题的第3小题,第六大题,第八大题).