2002年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：高等代数

请写出：1、考生须携带的有关用品，

2、对考生的具体要求：

2002年硕士研究生高等代数入学试题

一、（10分）计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

二、（10分）设 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求矩阵 X，使满足下面的关系式：

$$X\left(E-C^{-1}B\right)^T C^T = E$$

三、（12分）多项式

$$f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$$
$$g(x)=x^4+2x^3+x+2$$

求 $\left(f(x),g(x)\right)$ 和 $u(x),v(x)$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\left(f(x),g(x)\right).$$

四、（10分）设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases}$$

的系数行列式 $|A|=0$，A的某一元素 a_{kj} 的代数余子式 $A_{kj}\neq 0$，证明：

$x=(A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kn})^T$ 为此方程组的一个基础解系。

已对 518

2002 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：高等代数

请写出：1、考生须携带的有关用品：

2、对考生的具体要求：

五、(10 分)已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_s\alpha_s$，其中 $b_i\neq 0$，证明用 β 替换 α_i 后得到的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

六、(12 分) $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$W_2=L(\beta_1,\beta_2)$，其中

$$\begin{cases}\alpha_1=(1,2,-1,-2)\\ \alpha_2=(3,1,1,1)\\ \alpha_3=(-1,0,1,-1)\end{cases},\qquad \begin{cases}\beta_1=(2,5,-6,-5)\\ \beta_2=(-1,2,-7,3)\end{cases}$$

a) 求 $W_1\cap W_2$，并求 $W_1\cap W_2$ 的维数和一组基；

b) 求 W_1+W_2，并求 W_1+W_2 的维数和一组基。

七、(12 分) A 是可逆矩阵，且 A 可对角化。证明：

(1)、A^{-1} 也可对角化；

(2)、A^{*} 也可对角化。

八、(14 分) 求一个正交变换，使下列二次型化为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

九、(10 分) 设 A 是 n 维欧几里得空间 V 的正交变换，W 是 A 不变子空间，证明 W 的正交补 $W^{\perp}$ 也是 A 的不变子空间。